

**Pola zielone,
Lat młodych blask,
Chwile zielone
Ze sobą porwał czas...**

**Wkoło zielono,
Zielono i w nas...**

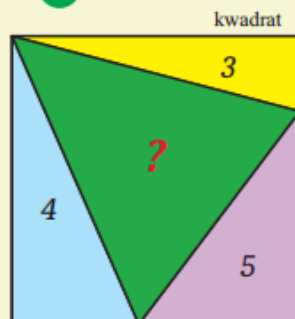
Najnowszy plakat
SEM poświęcony
jest obliczaniu pól różnych
wielokątów
z wykorzystaniem danych
z rysunków.

Pola zielone...

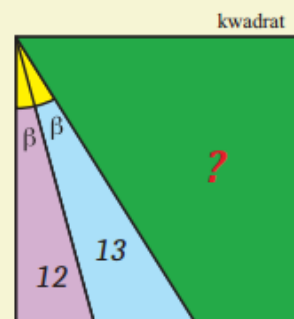


STOWARZYSZENIE NA RZECZ
EDUKACJI MATEMATYCZNEJ
Warszawa, ul. Śniadeckich 8
www.sem.edu.pl

1



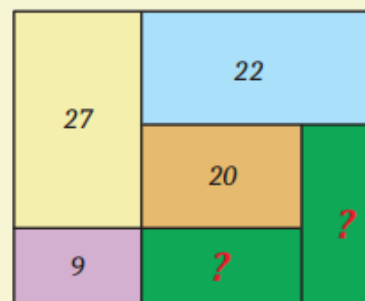
2



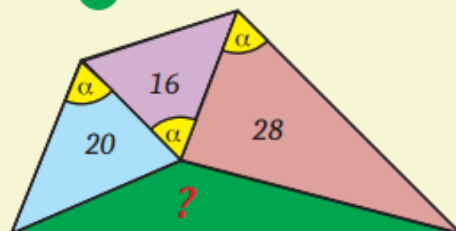
3



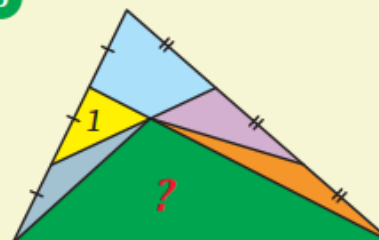
4



5



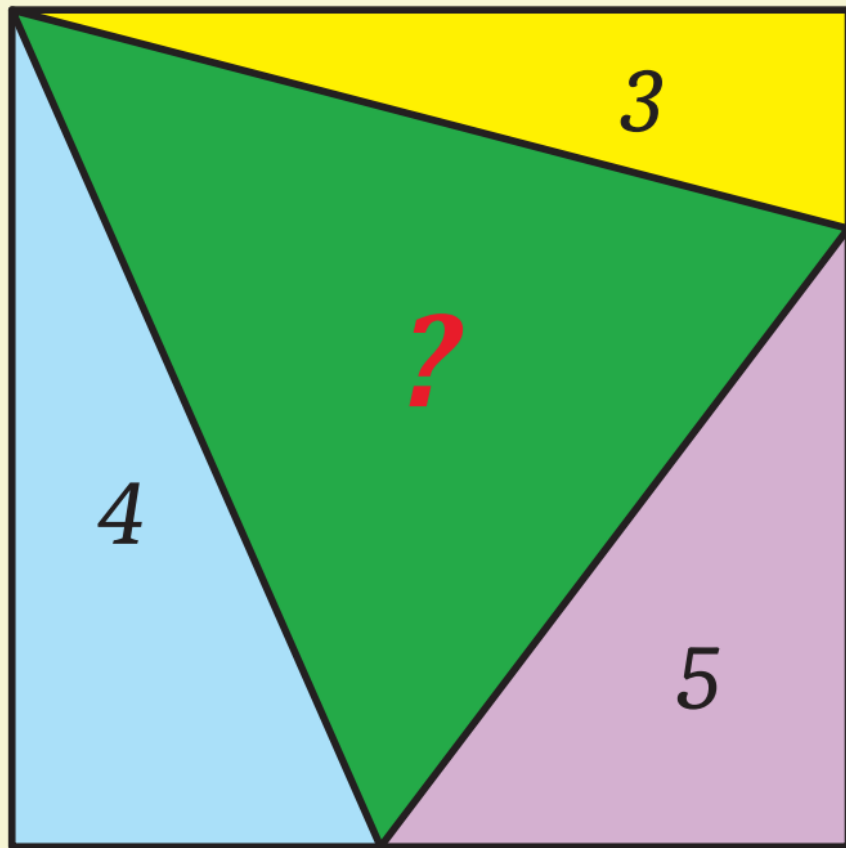
6

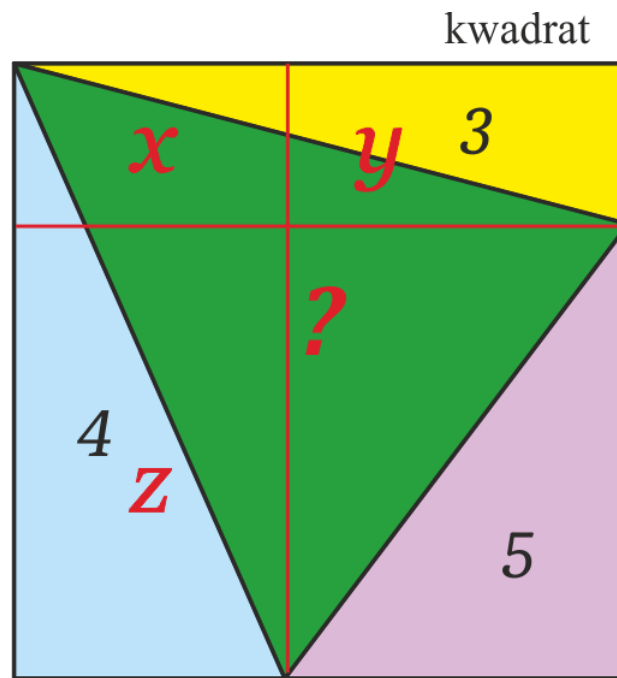




1

kwadrat

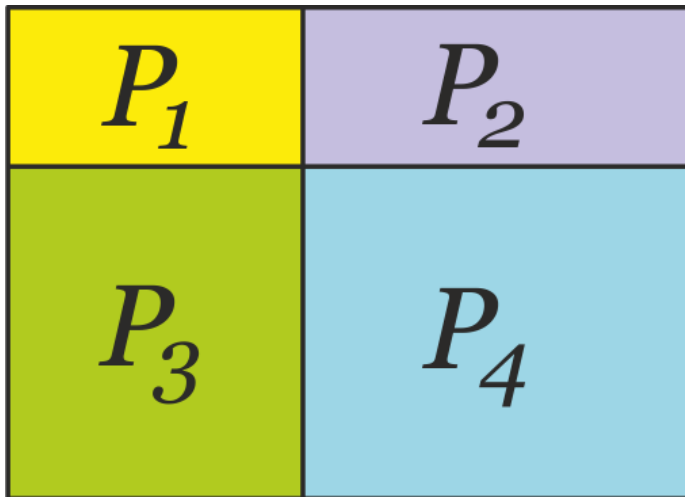




Podzielimy kwadrat na prostokąty liniami równoległymi do boków i oznaczmy pola trzech z tych prostokątów przez x , y , z (jak na rysunku).

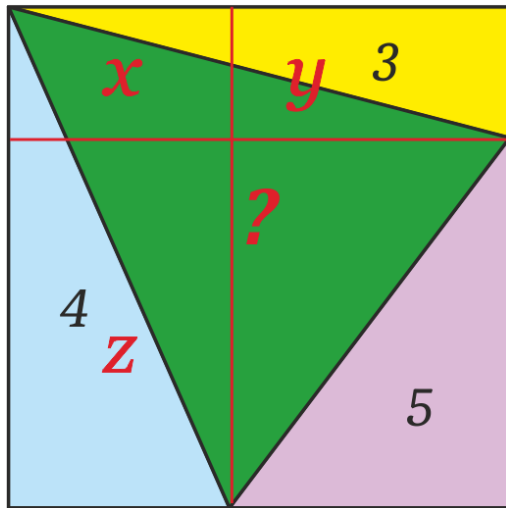
Pole czwartego prostokąta jest równe 10.

Jeśli podzielimy prostokąt na cztery
mniejsze prostokąty liniami równoległymi
do boków (jak na rysunku), to



$$P_1 \cdot P_4 = P_2 \cdot P_3$$

kwadrat



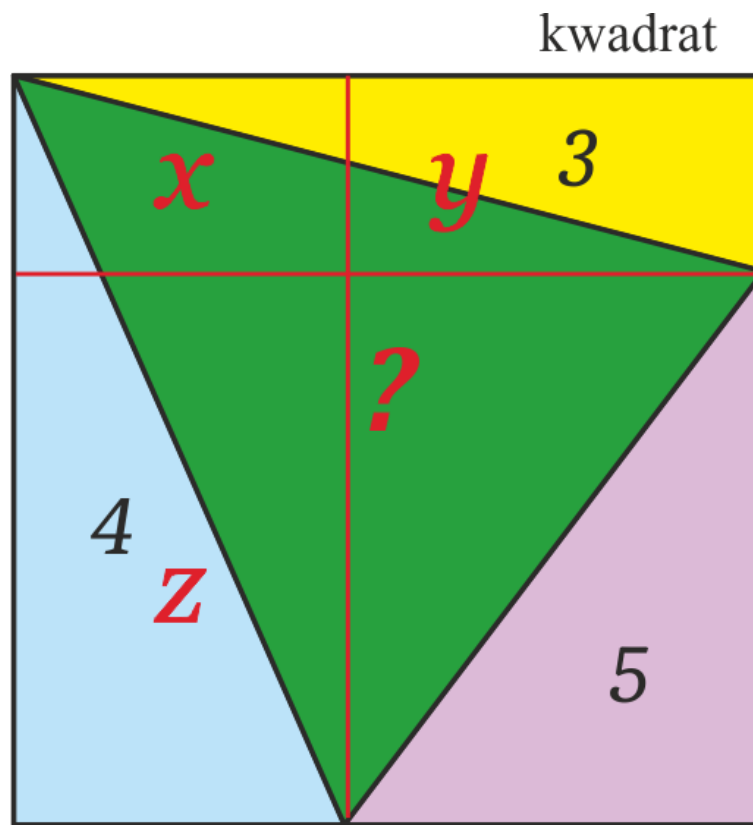
Zauważmy, że zachodzą równości:

$$\begin{cases} x + y &= 6 \\ x + z &= 8 \\ 10x &= yz \end{cases}$$

Wyliczając z pierwszych dwóch równań y i z oraz wstawiając do trzeciego równania otrzymujemy równanie

$$x^2 - 24x + 48 = 0,$$

z którego wyznaczamy $x = 12 - 4\sqrt{6}$.



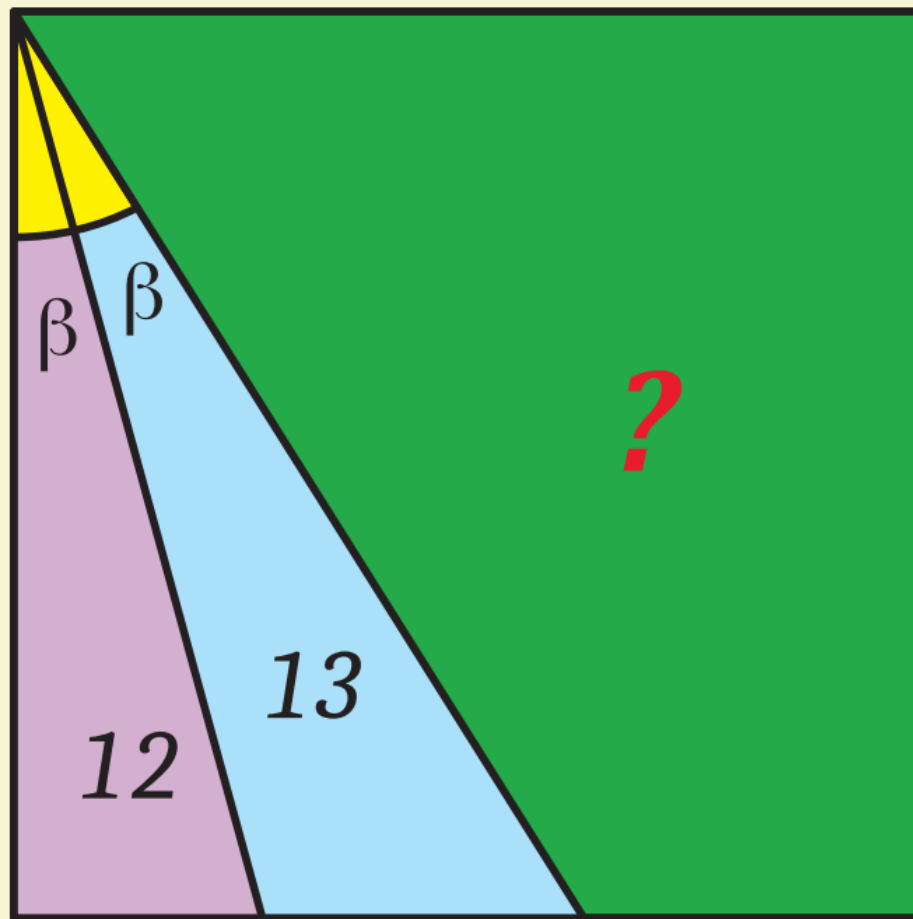
ZIELONE POLE jest więc równe

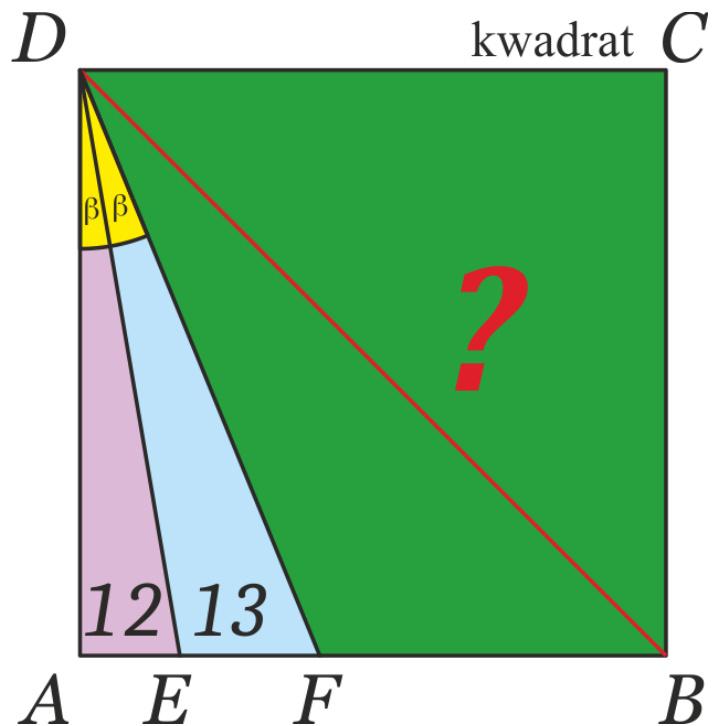
$$P = 6 + 8 + 10 - x - 3 - 4 - 5 = 4\sqrt{6}.$$



2

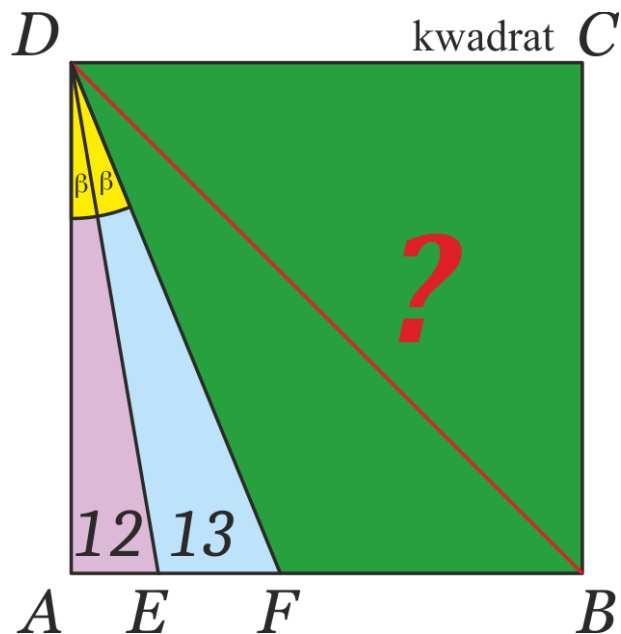
kwadrat





Z twierdzenia
o dwusiecznej kąta
wewnętrznego
w trójkącie ADF
otrzymujemy

$$\frac{|DA|}{|DF|} = \frac{|AE|}{|EF|}.$$

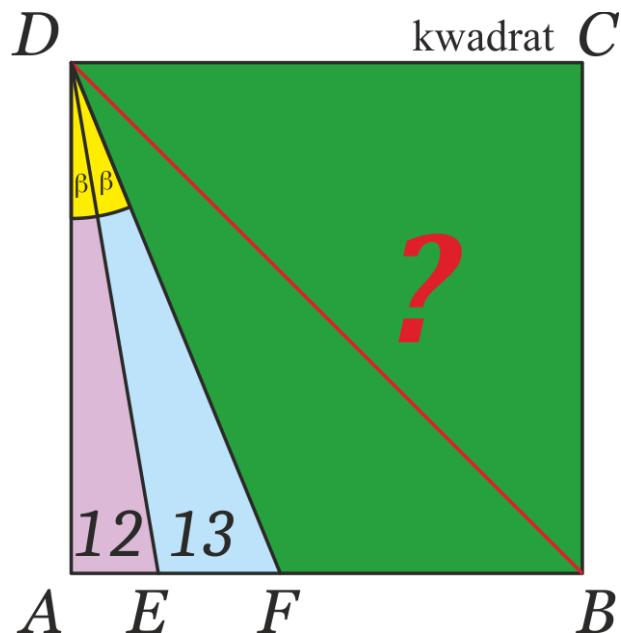


Trójkąty ADE i DEF
mają wspólną
wysokość, stąd

$$\frac{|AE|}{|EF|} = \frac{P_{\triangle ADE}}{P_{\triangle DEF}} = \frac{12}{13}.$$

Otrzymujemy więc, że

$$\frac{|DA|}{|DF|} = \frac{12}{13}.$$



Oznaczmy

$$|DA| = 12x,$$

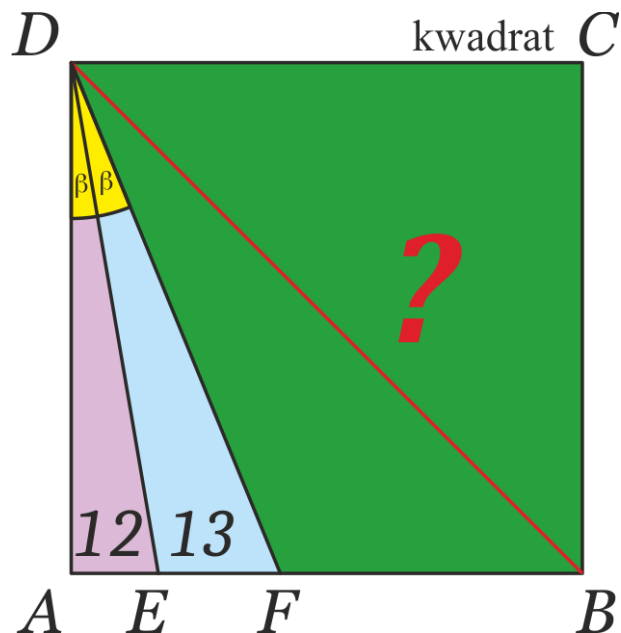
$$|DF| = 13x.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ADF dostajemy

$$|AF| = 5x,$$

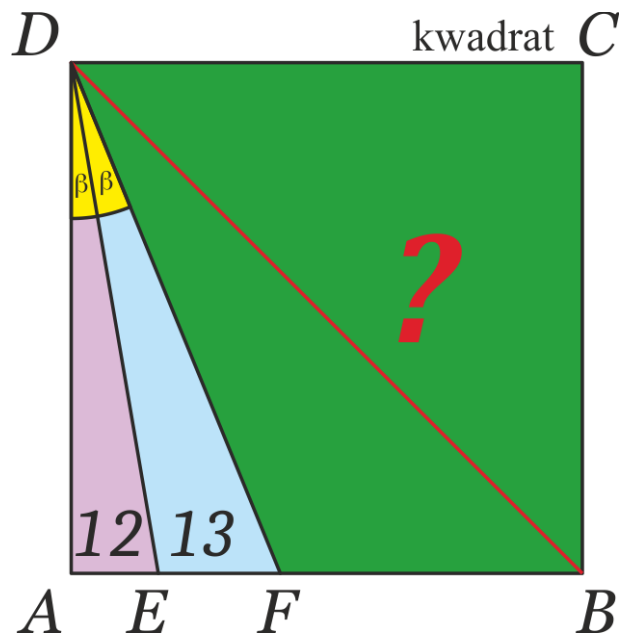
a więc

$$|FB| = 7x.$$



Trójkąty ADF i BDF mają wspólną wysokość, stąd

$$\frac{P_{\triangle ADF}}{P_{\triangle BDF}} = \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{5x}{7x} = \frac{5}{7}.$$



Otrzymujemy więc, że

$$P_{\triangle BDF} = \frac{7}{5} \cdot P_{\triangle ADF}$$

$$= \frac{7}{5} \cdot 25 = 35$$

oraz, że

$$P_{\triangle BCD} = 12 + 13 + 35 = 60.$$

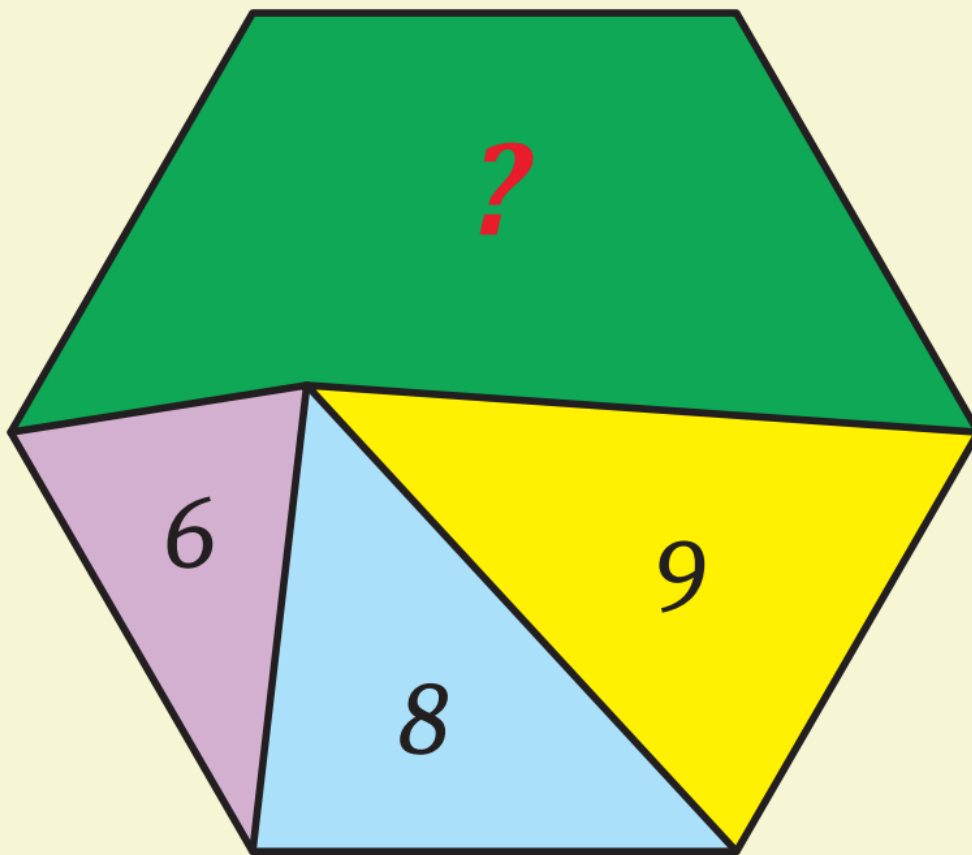
ZIELONE POLE jest więc równe

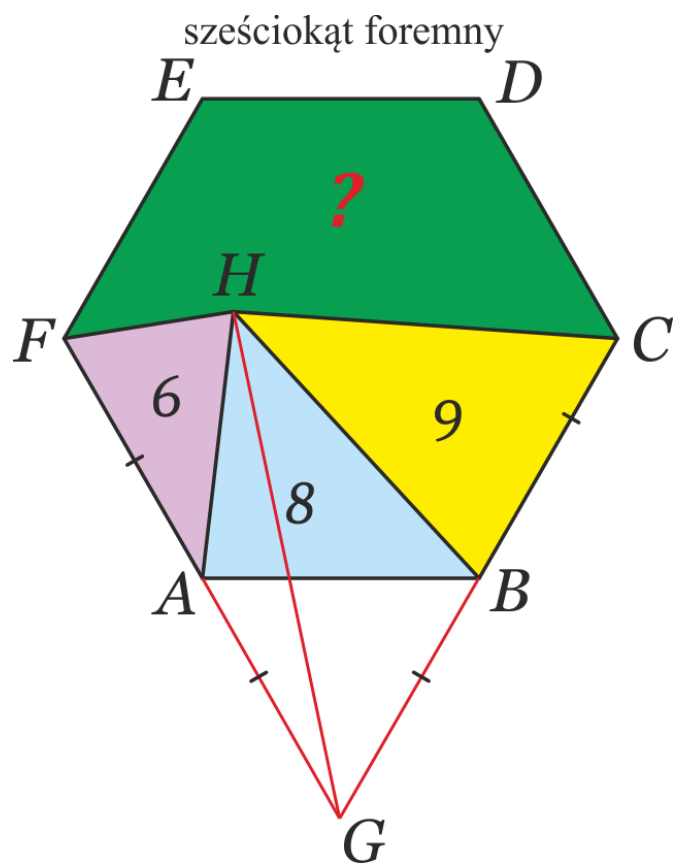
$$P = 60 + 35 = 95.$$



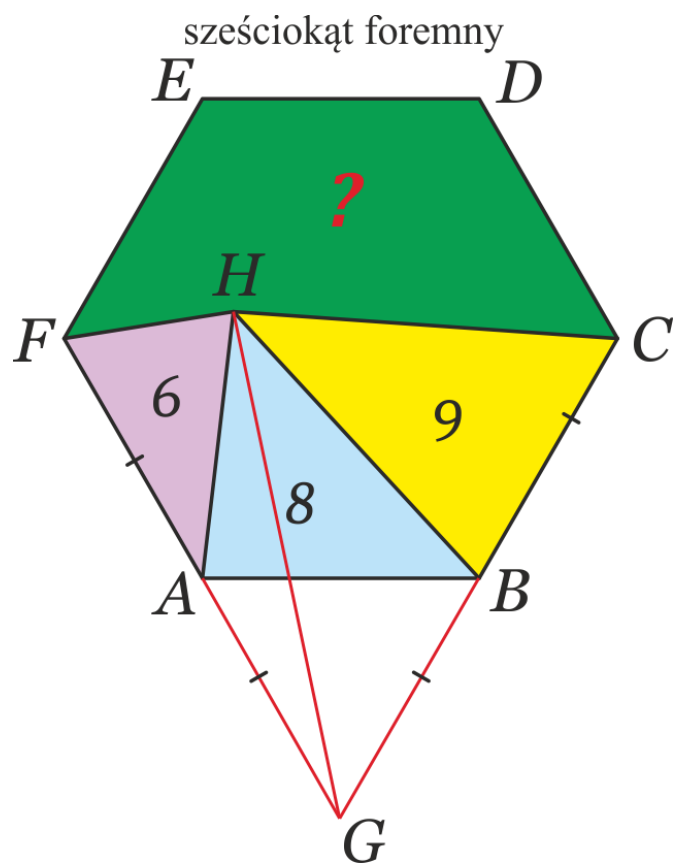
3

sześciokąt foremny



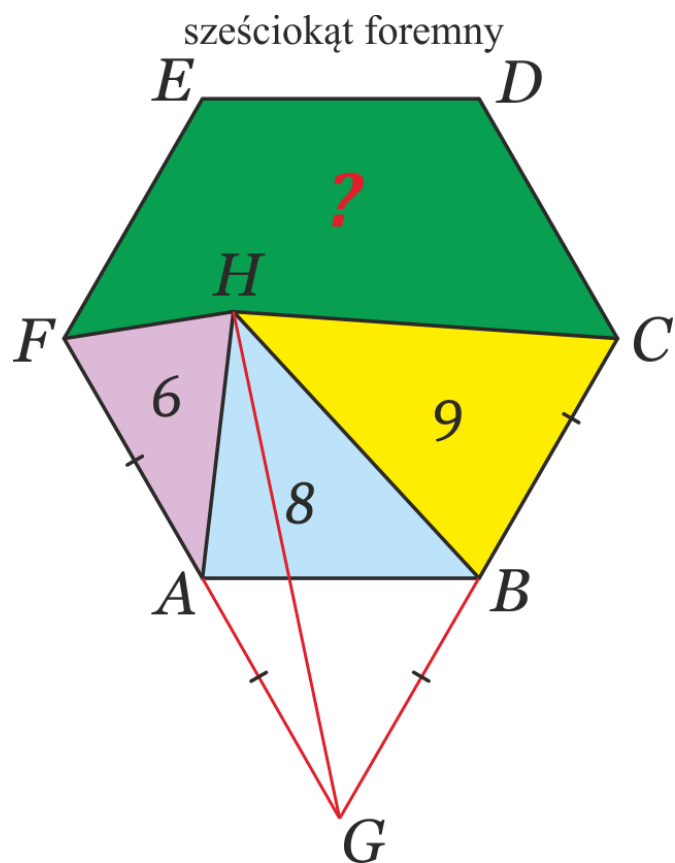


Przedłużmy boki
 AF i BC do
przecięcia
w punkcie G oraz
połączmy punkty
 G i H .



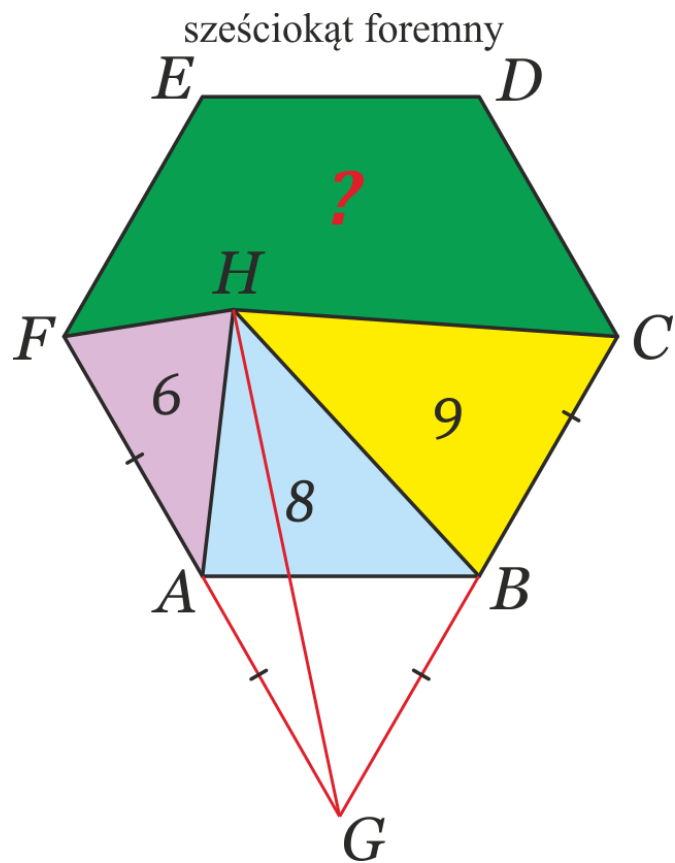
Trójkąty
 AFH i AGH mają
 równe pola
 (równe podstawy
 i równe wysokości),
 a więc

$$P_{\triangle AGH} = 6.$$



Trójkąty
 BCH i BGH mają też
 równe pola
 (równe podstawy
 i równe wysokości),
 a więc

$$P_{\triangle BGH} = 9.$$

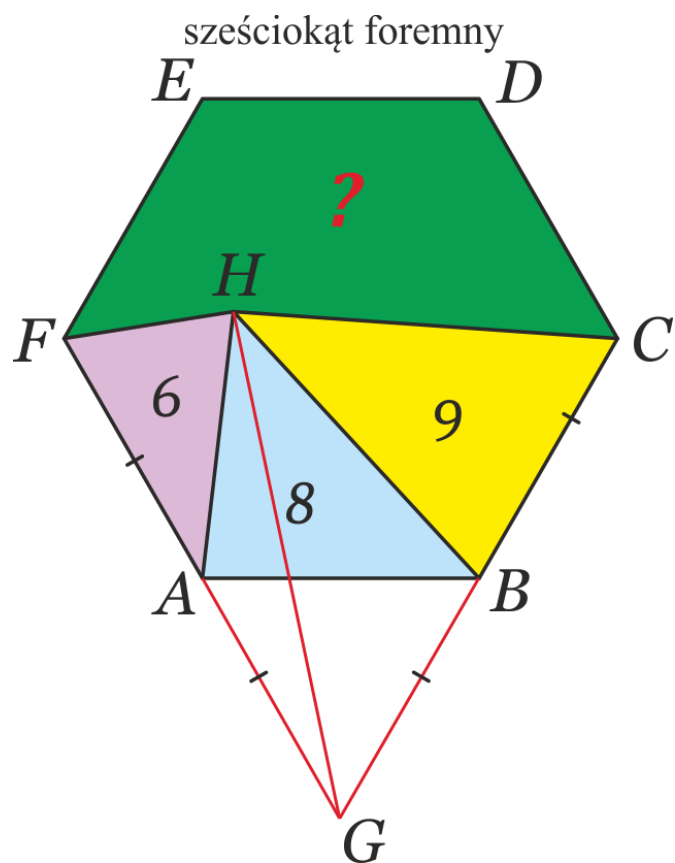


Stąd

$$P_{AGBH} = 6 + 9 = 15,$$

a więc

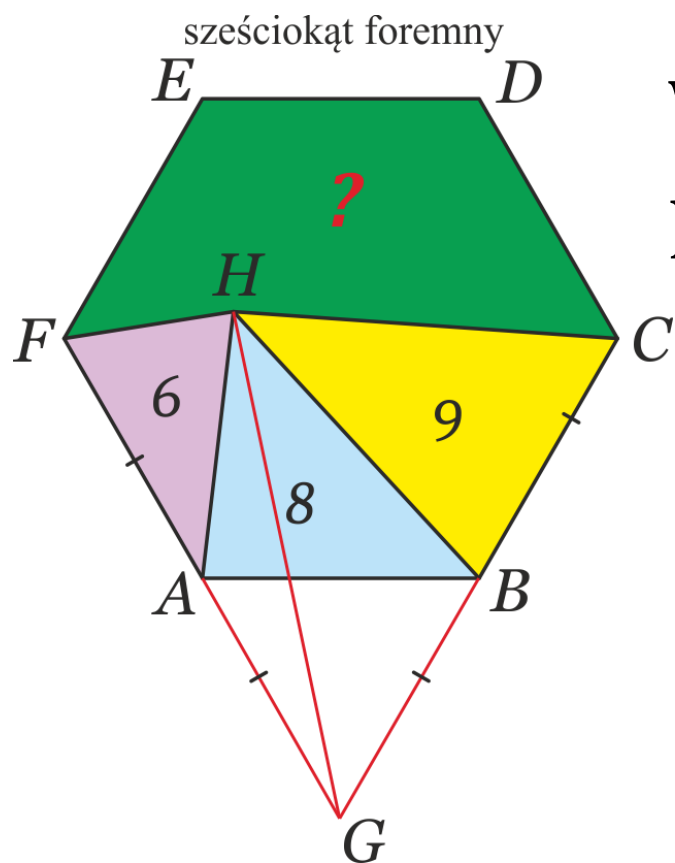
$$P_{\triangle ABG} = 15 - 8 = 7.$$



Sześciokąt $ABCDEF$ jest zbudowany z sześciu trójkątów przystających do trójkąta ABG .

Otrzymujemy więc, że

$$P_{ABCDEF} = 6 \cdot 7 = 42.$$



Wyznaczamy pole
pięciokąta $CDEFH$

$$P_{CDEFH} =$$

$$P_{ABCDEF} - P_{ABCHF}$$

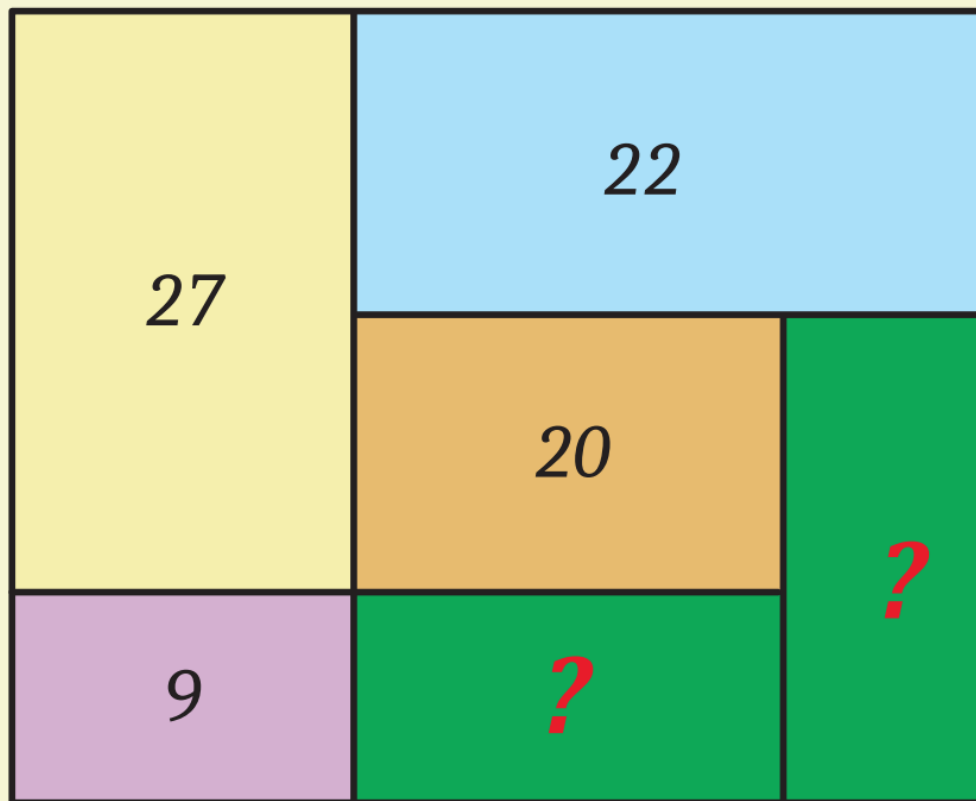
$$= 42 - 23 = 19.$$

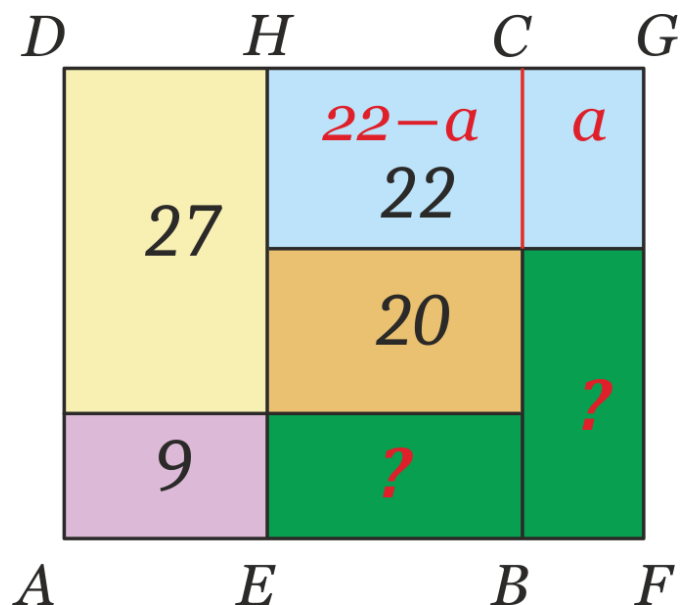
ZIELONE POLE jest więc równe

$$P = 19.$$

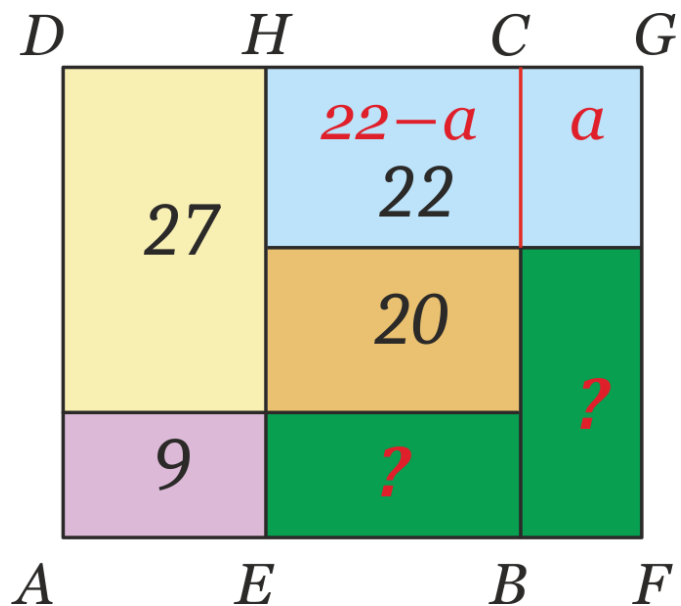


4





Podzielimy niebieski prostokąt na dwie części i oznaczmy ich pola przez a i $22 - a$. Szukane pola zielonych prostokątów oznaczmy przez x .

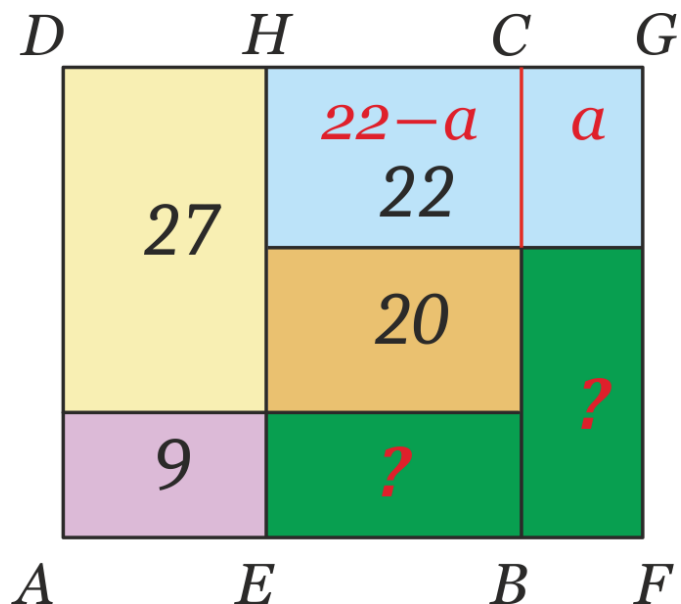


Z prostokąta $ABCD$
mamy

$$27x = 9(42 - a).$$

Z prostokąta $EFGH$ dostajemy z kolei

$$a(20 + x) = x(22 - a).$$



Rozwiązując układ
równań

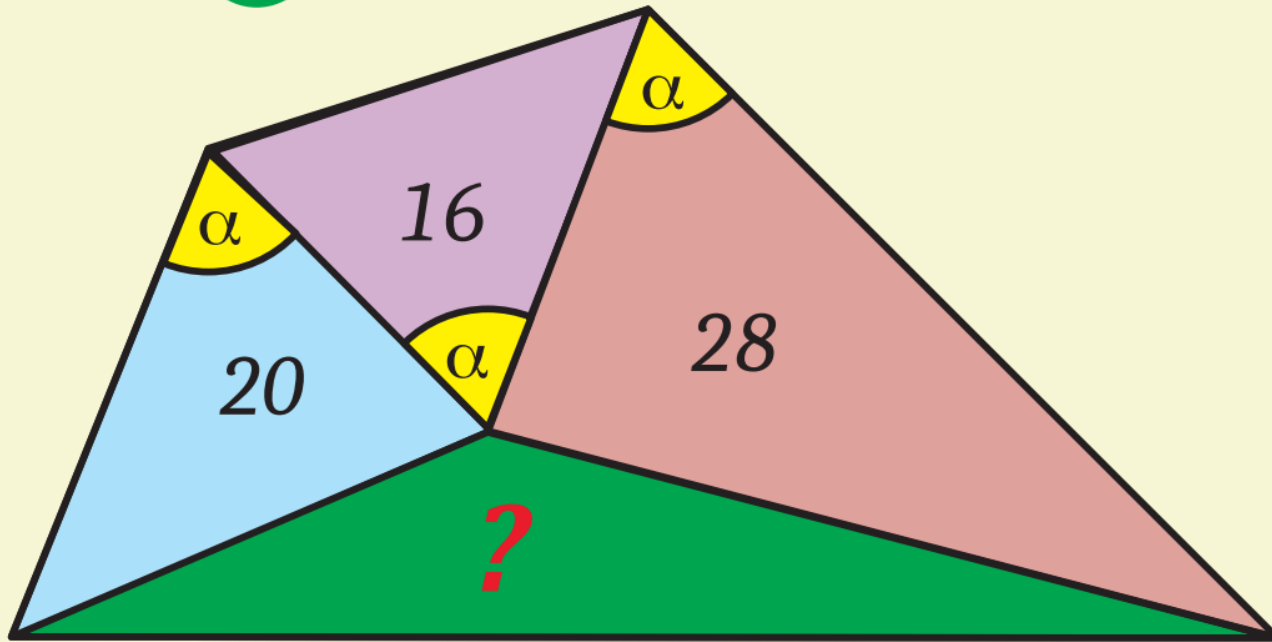
$$\begin{cases} 27x &= 9(42 - a) \\ a(20 + x) &= x(22 - a) \end{cases}$$

otrzymujemy $a = 6$, $x = 12$.

Każde z **ZIELONYCH PÓL** jest więc
równe $P = 12$.

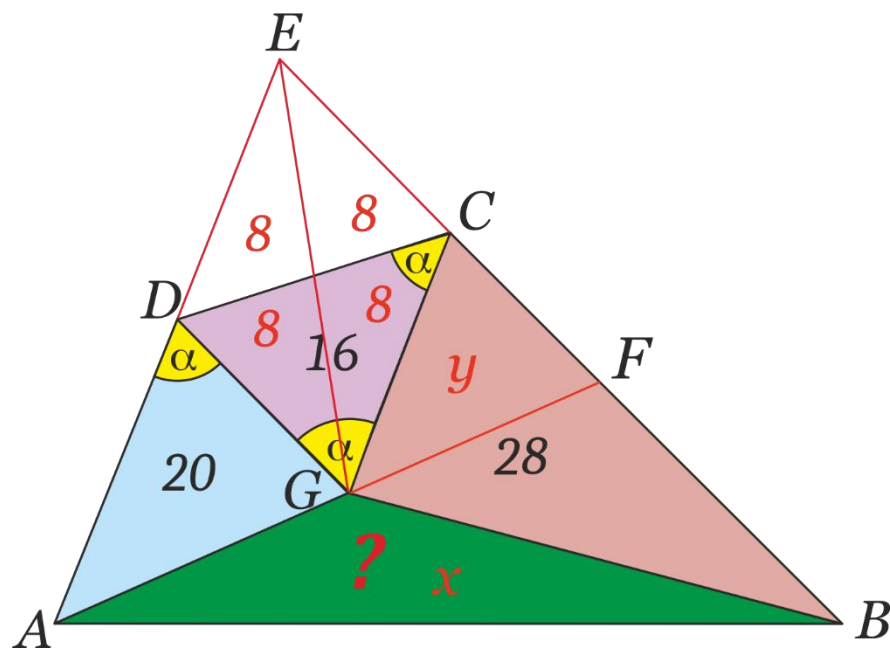


5



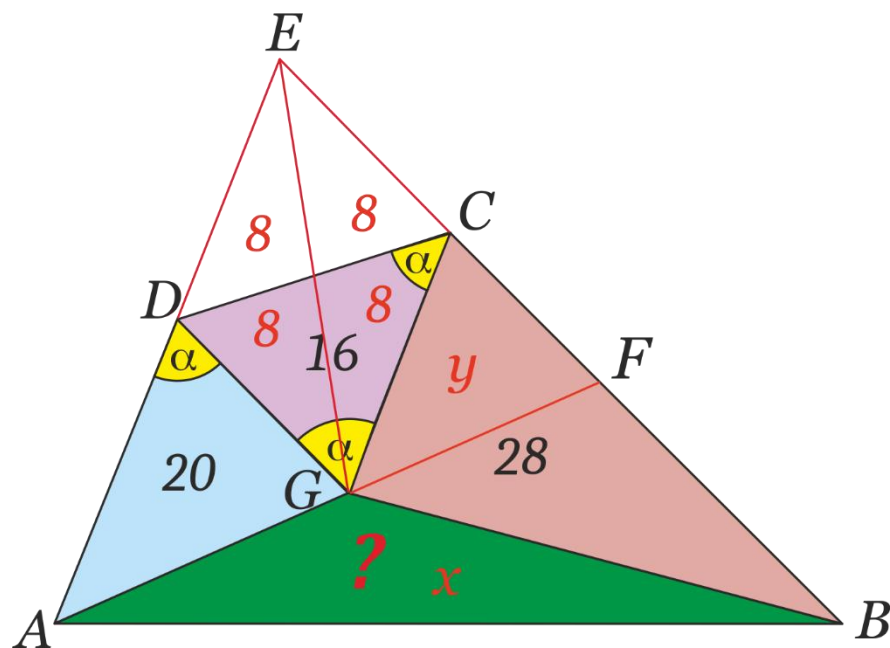


Przedłużmy boki AD i BC do przecięcia w punkcie E . Przedłużmy również odcinek AG do przecięcia z bokiem BC w punkcie F . Oznaczmy szukane zielone pole przez x , zaś pole trójkąta CFG przez y (jak na rysunku).



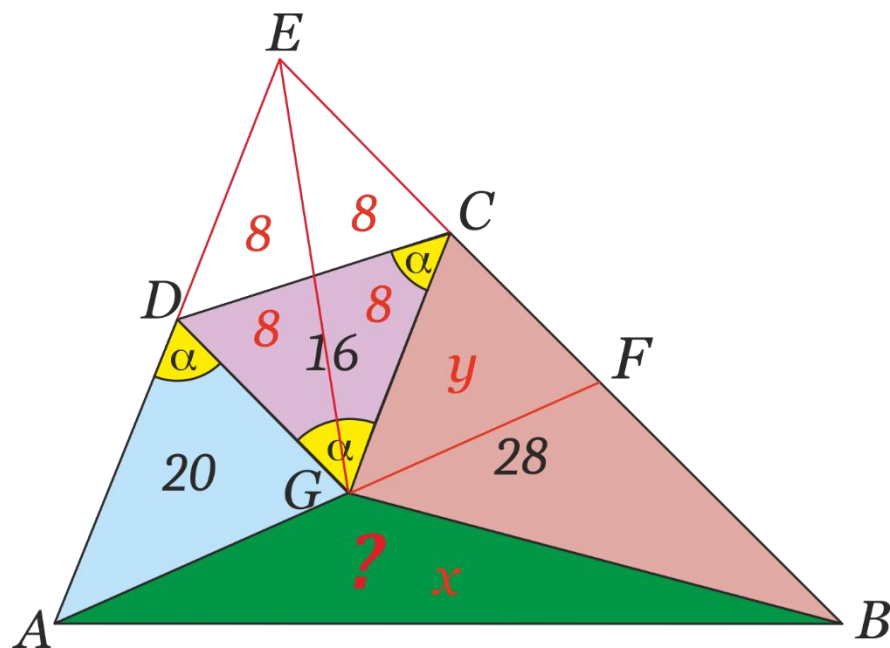
Zauważmy, że trójkąty ADG i DEG mają wspólną wysokość, stąd

$$\frac{|AD|}{|DE|} = \frac{P_{\triangle ADG}}{P_{\triangle DEG}} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}.$$



Trójkąt ADG jest więc podobny do trójkąta AEF w skali $k = \frac{5}{9}$, a stąd

$$\frac{P_{\triangle ADG}}{P_{\triangle AEF}} = \left(\frac{5}{9}\right)^2.$$



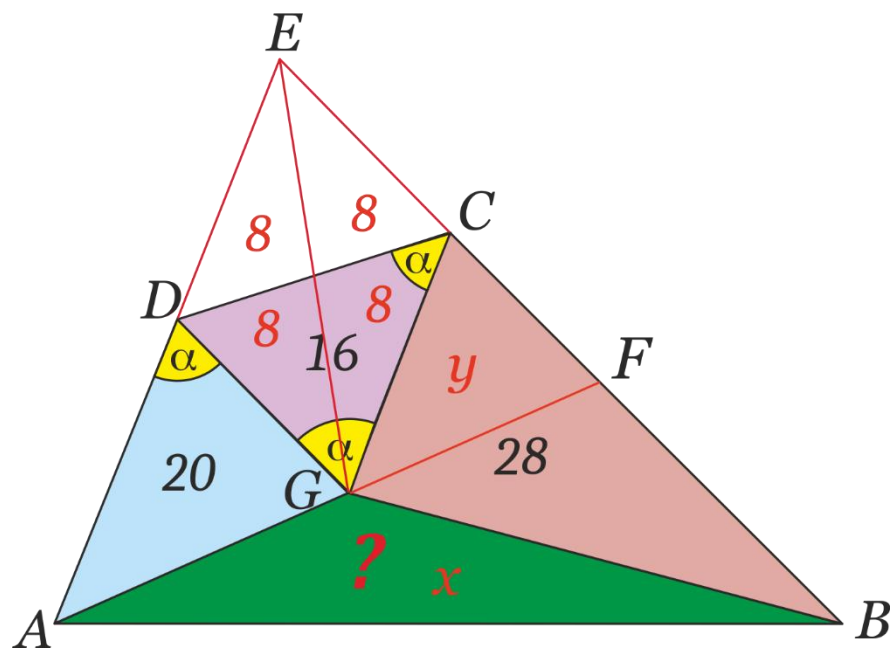
Mamy więc

$$\frac{20}{y + 52} = \frac{25}{81}.$$

Z zależności tej otrzymujemy $y = 12,8$,
a tym samym pole trójkąta BFG
jest równe $15,2$.

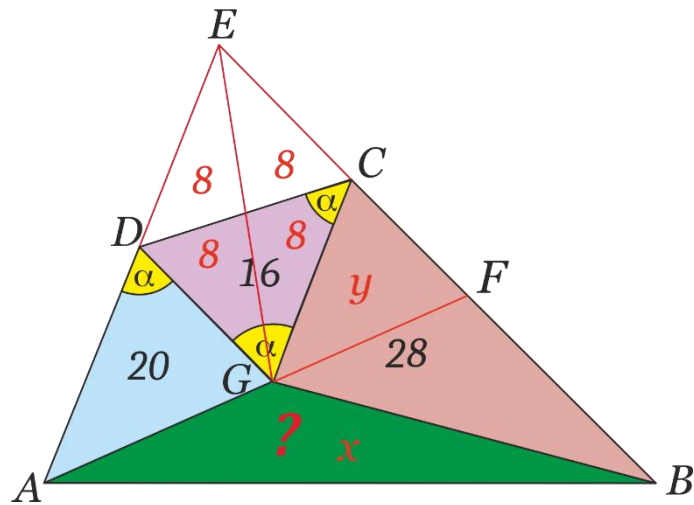


$$\frac{|BF|}{|EF|} = \frac{P_{\triangle BFG}}{P_{\triangle EFG}} = \frac{15,2}{28,8}.$$



Mamy też

$$\frac{|BF|}{|EF|} = \frac{P_{\triangle ABF}}{P_{\triangle AEF}}.$$



Otrzymujemy więc

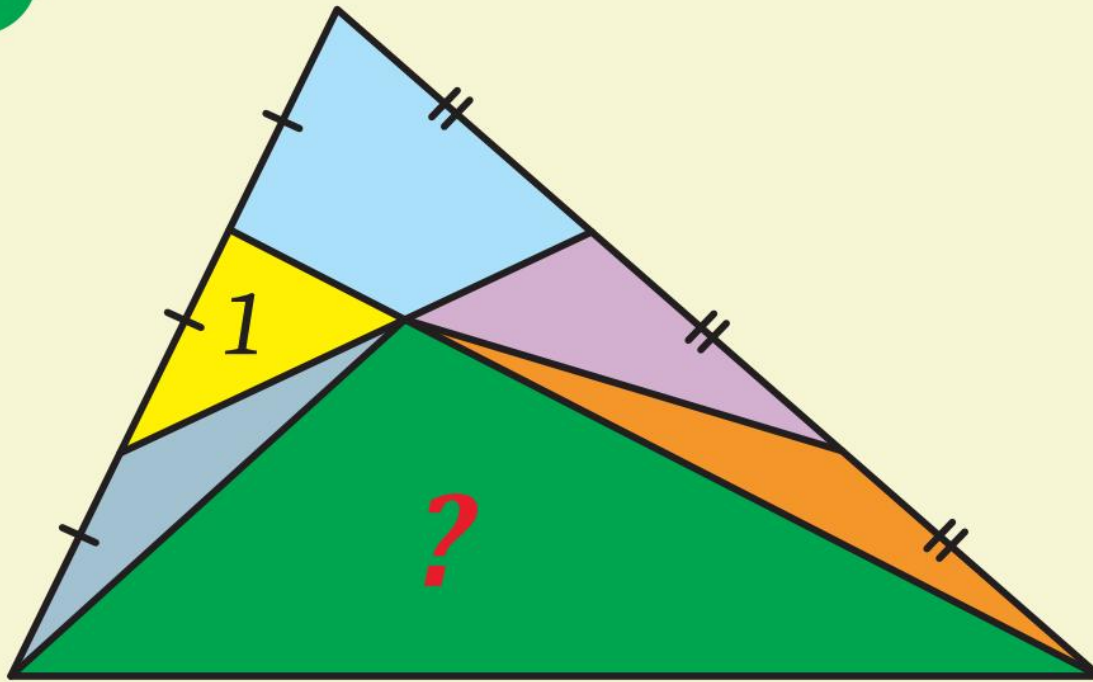
$$\frac{15,2}{28,8} = \frac{x + 15,2}{64,8},$$

skąd łatwo wyliczamy $x = 19$.

ZIELONE POLE jest więc równe **$P = 19$** .

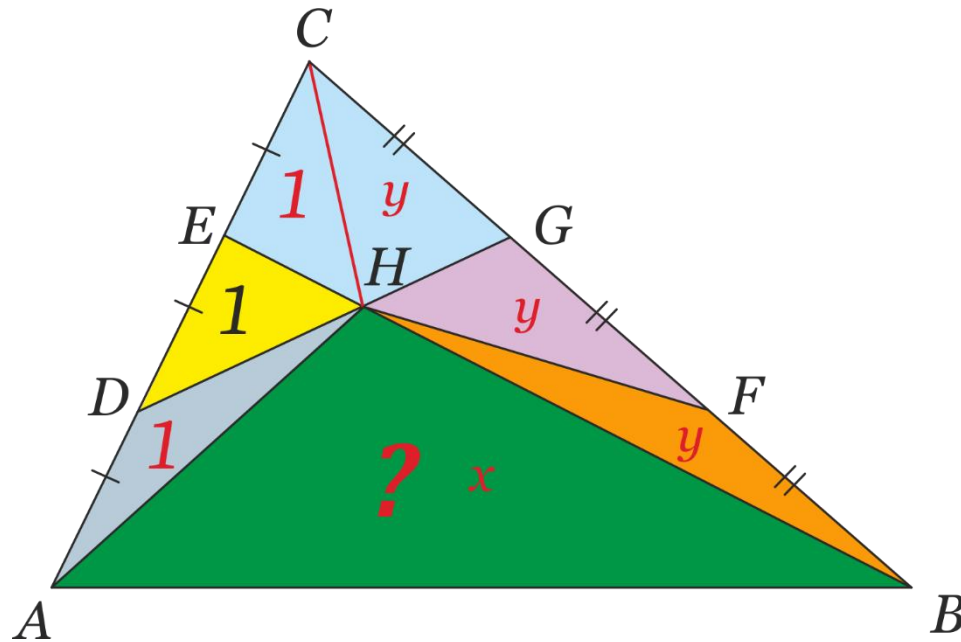


6



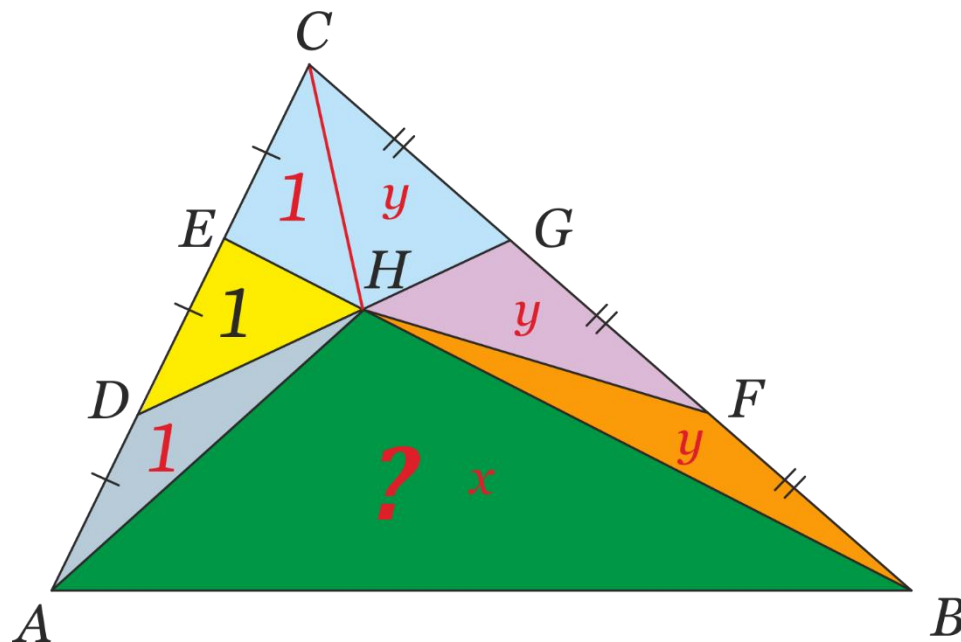


Trójkąty ADH i CEH mają takie samo pole, jak trójkąt DEH , czyli 1 (takie same podstawy, wspólna wysokość).



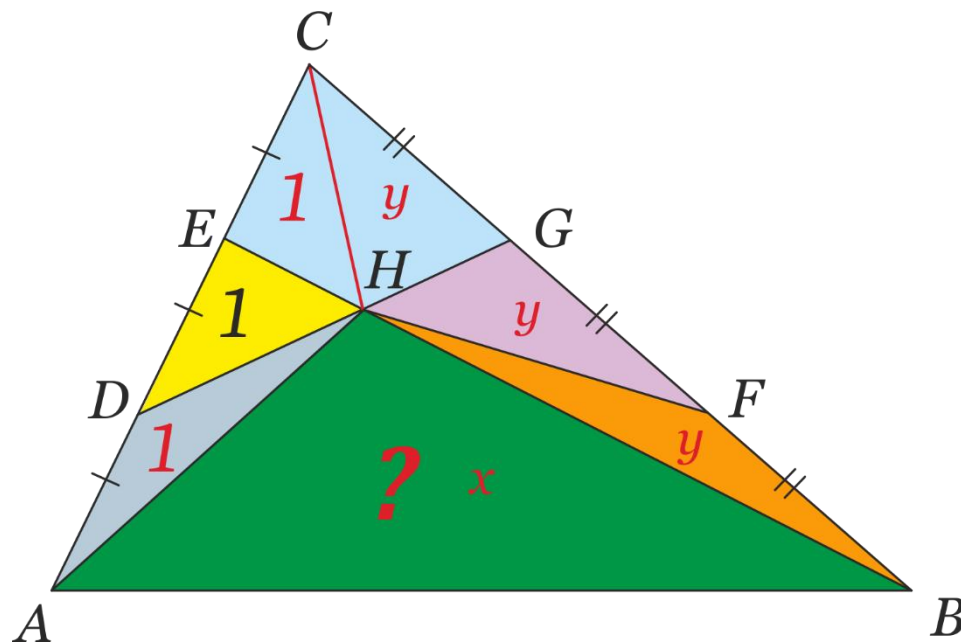
Analogicznie trójkąty BFH , FGH i CGH mają równe pola, oznaczmy je przez y . Szukane zielone pole oznaczmy z kolei przez x .

Niech ponadto kąt ACB ma miarę γ .



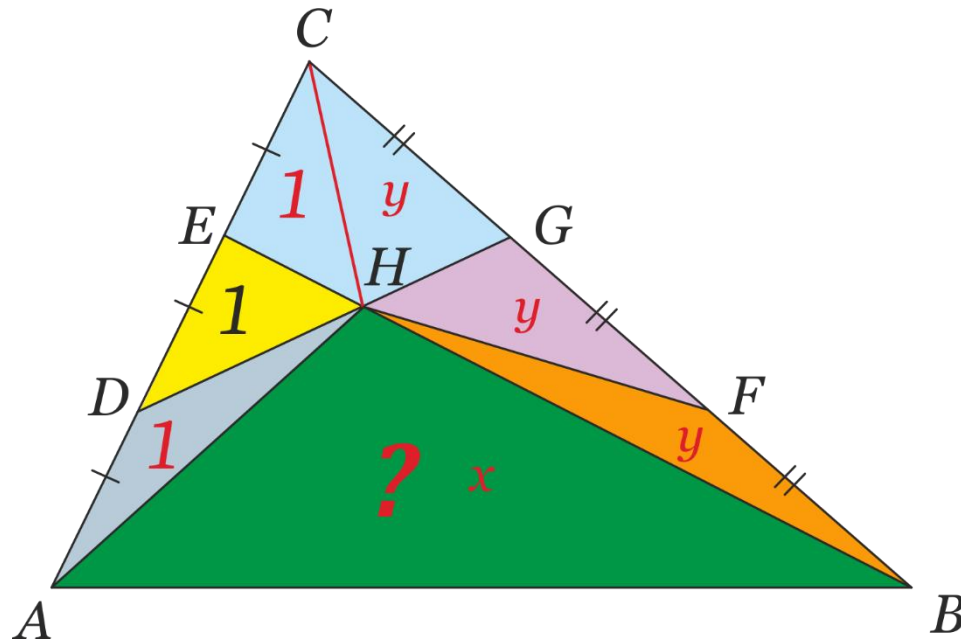
Zauważmy, że

$$\frac{P_{\triangle DGC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} |AC| \cdot \frac{1}{3} |BC| \cdot \sin \gamma}{\frac{1}{2} |AC| \cdot |BC| \cdot \sin \gamma} = \frac{2}{9}.$$



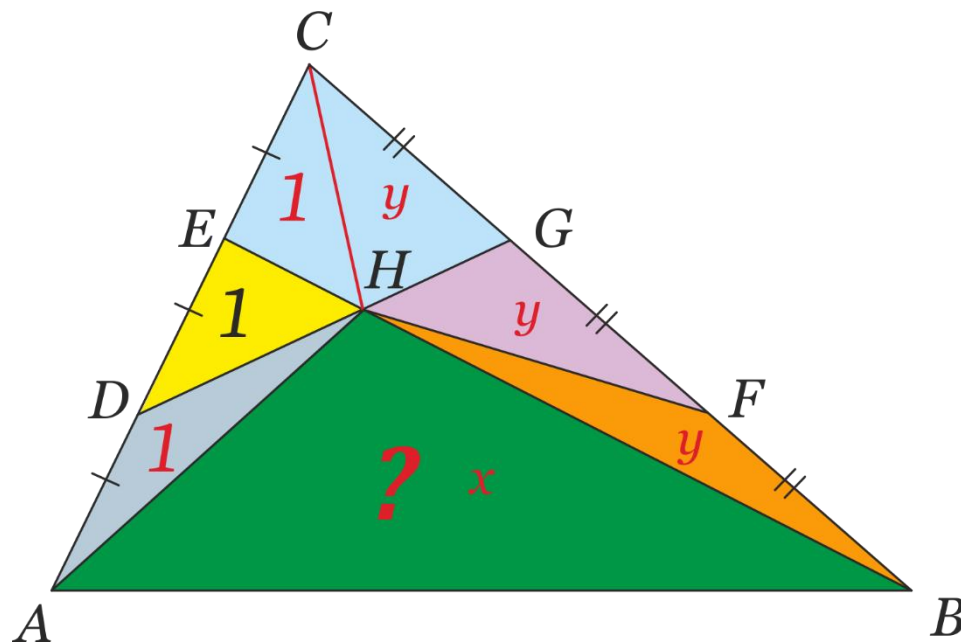
Otrzymujemy stąd, że

$$\frac{y + 2}{x + 3y + 3} = \frac{2}{9}.$$



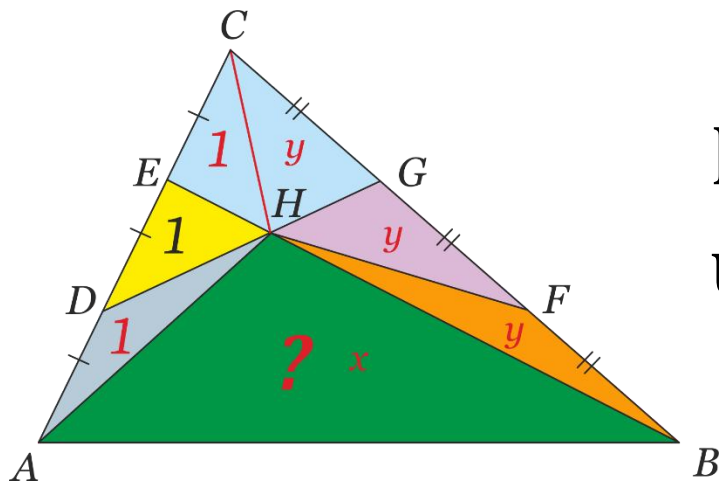
Zauważmy ponadto, że

$$\frac{|EH|}{|HB|} = \frac{P_{\triangle AEH}}{P_{\triangle ABH}} = \frac{P_{\triangle CEH}}{P_{\triangle BCH}}.$$



Mamy więc, że

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{3y}.$$



Rozwiązując
układ równań

$$\begin{cases} \frac{y + 2}{x + 3y + 3} = \frac{2}{9} \\ \frac{2}{x} = \frac{1}{3y} \end{cases}$$

otrzymujemy $y = \frac{4}{3}, x = 8$.

ZIELONE POLE jest więc równe **$P = 8$** .