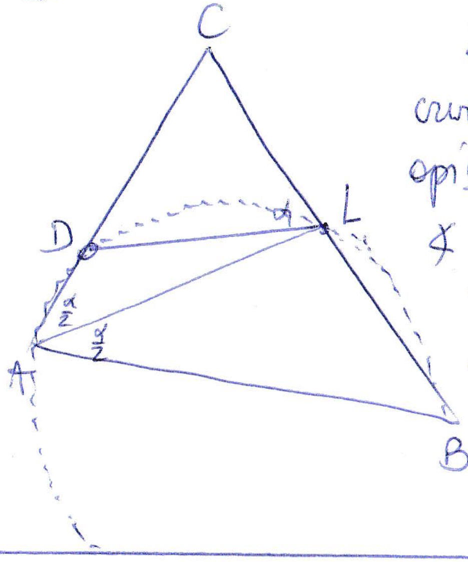
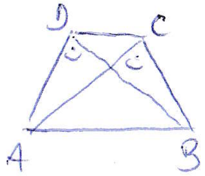
Zad. 1

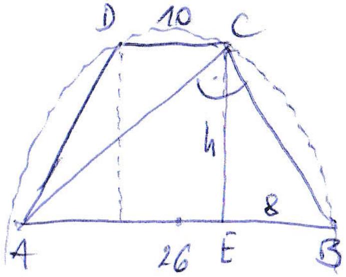


Zauważmy że na czworokącie ABLD można opisać okrąg bo
$\sphericalangle DAB + \sphericalangle DLB = 180^\circ$.
Stąd $DL = LB$ bo na nich oparte są równe kąty wpisane.

Zad. 2



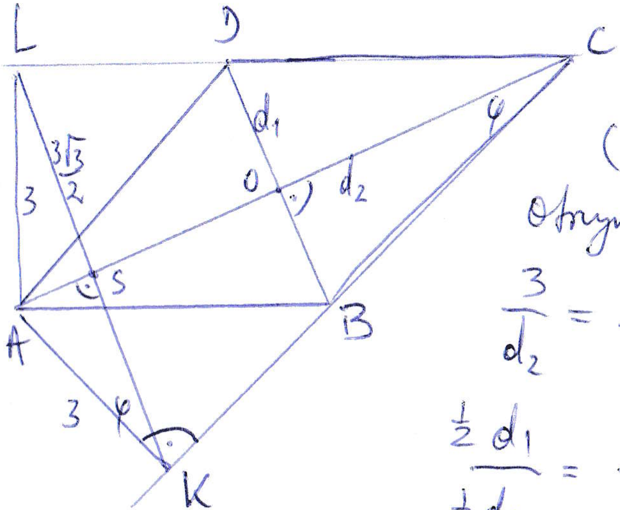
Jeśli przekątne są prostopadłe do boków to na ABCD można opisać okrąg. Jeśli ABCD jest trapezem to musi być równoramienny, a jego podstawa jest średnicą okręgu.



Zauważmy że $AE = 18$ oraz $EB = 8$.
Z własności wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną otrzymujemy $h = \sqrt{18 \cdot 8} = 12$.

Stąd $P_{\triangle} = \frac{1}{2}(26 + 10) \cdot 12 = 216$

Zad. 3



Rozważmy $\triangle AKS$: $AK = 3$, $SK = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ oraz z tw. Pitagorasa $AS = \frac{3}{2}$.

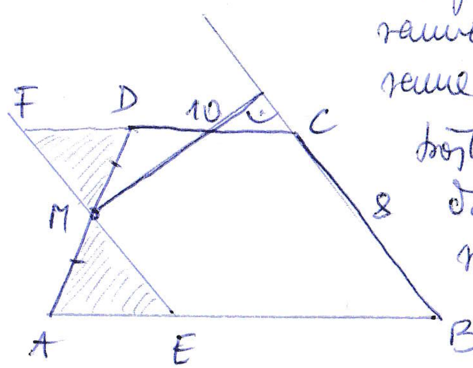
Łatwo zauważyć podobieństwo trójkątów AKS, AKC i OBC (wszystkie prostokątne i φ)

Otrzymujemy zatem proporcje:

$$\frac{3}{d_2} = \frac{\frac{3}{2}}{3} \Rightarrow \boxed{d_2 = 6} \text{ oraz}$$

$$\frac{\frac{1}{2} d_1}{\frac{1}{2} d_2} = \frac{SK}{SC} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{6 - \frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{d_1 = 2\sqrt{3}}$$

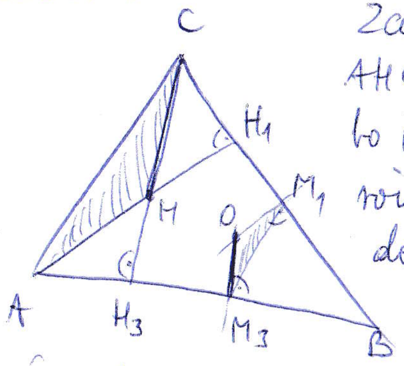
Zad. 4



Poprowadźmy przez środek M ramienia równoległe do drugiego ramienia. Otrzymujemy przystające trójkąty $AEM = MDF$.
Oznacza to że pole trapezu równe jest polu równoległoboku EBCF.

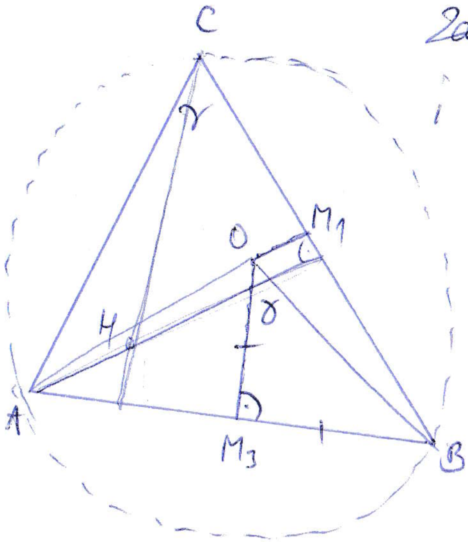
$P = 8 \cdot 10 = 80$.

Zad. 5



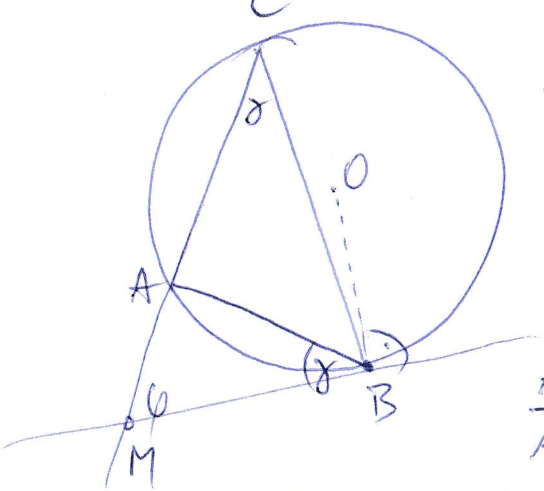
Zauważmy że trójkąty AHC i OM_1M_3 są podobne bo ich boki są do siebie równoległe. Skala podobieństwa wynosi 2 bo M_1M_3 jest linią środkową w trójkącie i $M_1M_3 = \frac{1}{2}AC$.

Zad 6



Zauważmy że $\sphericalangle AOB$ jest kątem środkowym i $\sphericalangle AOB = 2\gamma$ stąd $\sphericalangle M_3OB = \gamma$. Na mocy zad. 5 mamy $OM_3 = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}AB = M_3B$ stąd $\sphericalangle \gamma = 45^\circ$.

Zad 7



Zauważmy że $\sphericalangle MBA = \gamma$ bo jest dopisany. Stąd $\Delta AMB \sim \Delta MBC$ (wspólny kąt φ i γ)

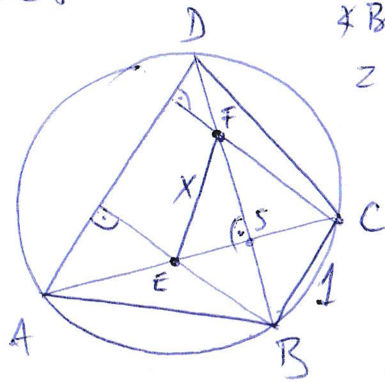
Otrzymujemy proporcje

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AB}{BC} = k$$

Z drugiej strony $\frac{MB}{MC} = \frac{AM}{MB} \Rightarrow MC = \frac{MB^2}{AM}$

Ostatecznie $\frac{AM}{MC} = \frac{AM^2}{MB^2} = k^2$

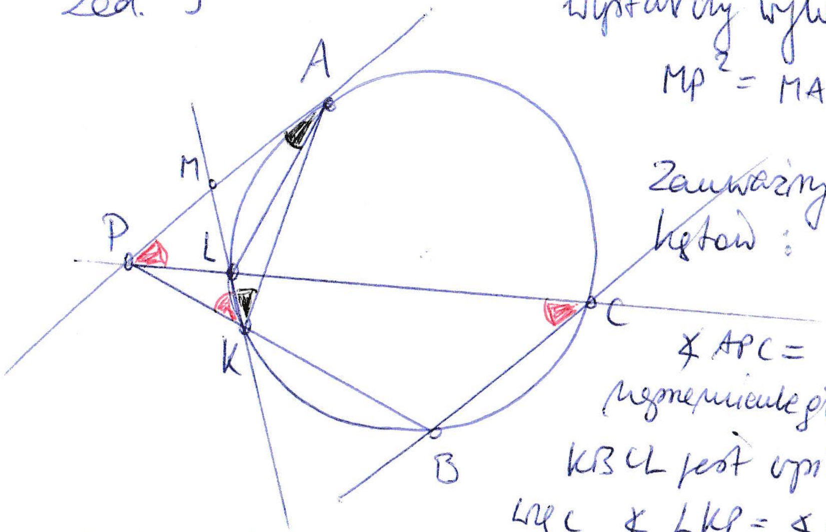
Zad 8



I sposób: Mamy $\sphericalangle DBC = \varphi$ wówczas $\sphericalangle DAC = \varphi$, $\sphericalangle BEC = 90 - \varphi$ i $\sphericalangle DBE = \varphi$. Stąd $BE = BC$. Z kolei mamy $\sphericalangle ACB = \gamma$. wówczas $\sphericalangle ADF = \gamma$, $\sphericalangle BFC = 90 - \gamma$ i $\sphericalangle ACF = \gamma$. Stąd $BC = FC$. Oznacza to że $EBCF$ jest rombem i $EF = 1$.

II sposób: korzystamy z własności ortocentrum: obraz ortocentrum w symetrii względem boku leży na okręgu opisanym. Zauważmy że E jest ortocentrum w ΔABD, a F ortocentrum w ΔACD. Mamy $ES = SC$ oraz $FS = SB$. Zatem czworokąt $EBCF$ jest rombem.

Zad. 9



Wystarczy wykazać że $MP^2 = MA^2$.

Zauważmy równość kątów:

$\sphericalangle APC = \sphericalangle PCB$ bo są naprzemianległe. Czworokąt $KBCL$ jest wpisany w okrąg więc $\sphericalangle LKP = \sphericalangle LCB$.

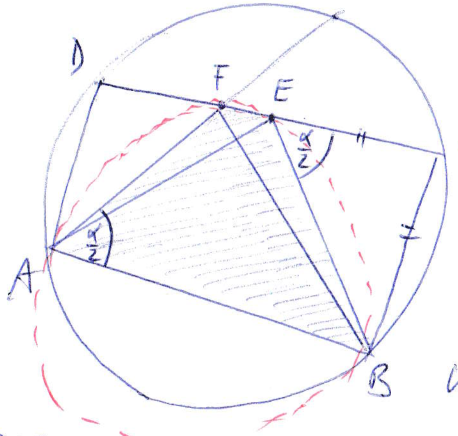
Z drugiej strony $\sphericalangle MAL = \sphericalangle LKA$ (dopisany).

Zatem $\Delta PML \sim \Delta PKM$ skąd $\frac{PM}{ML} = \frac{MK}{PM} \Rightarrow PM^2 = MK \cdot ML$

Dalej $\Delta MAL \sim \Delta MAK$ skąd $\frac{MA}{ML} = \frac{MK}{MA} \Rightarrow MA^2 = MK \cdot ML$

cbdo.

Zad. 10

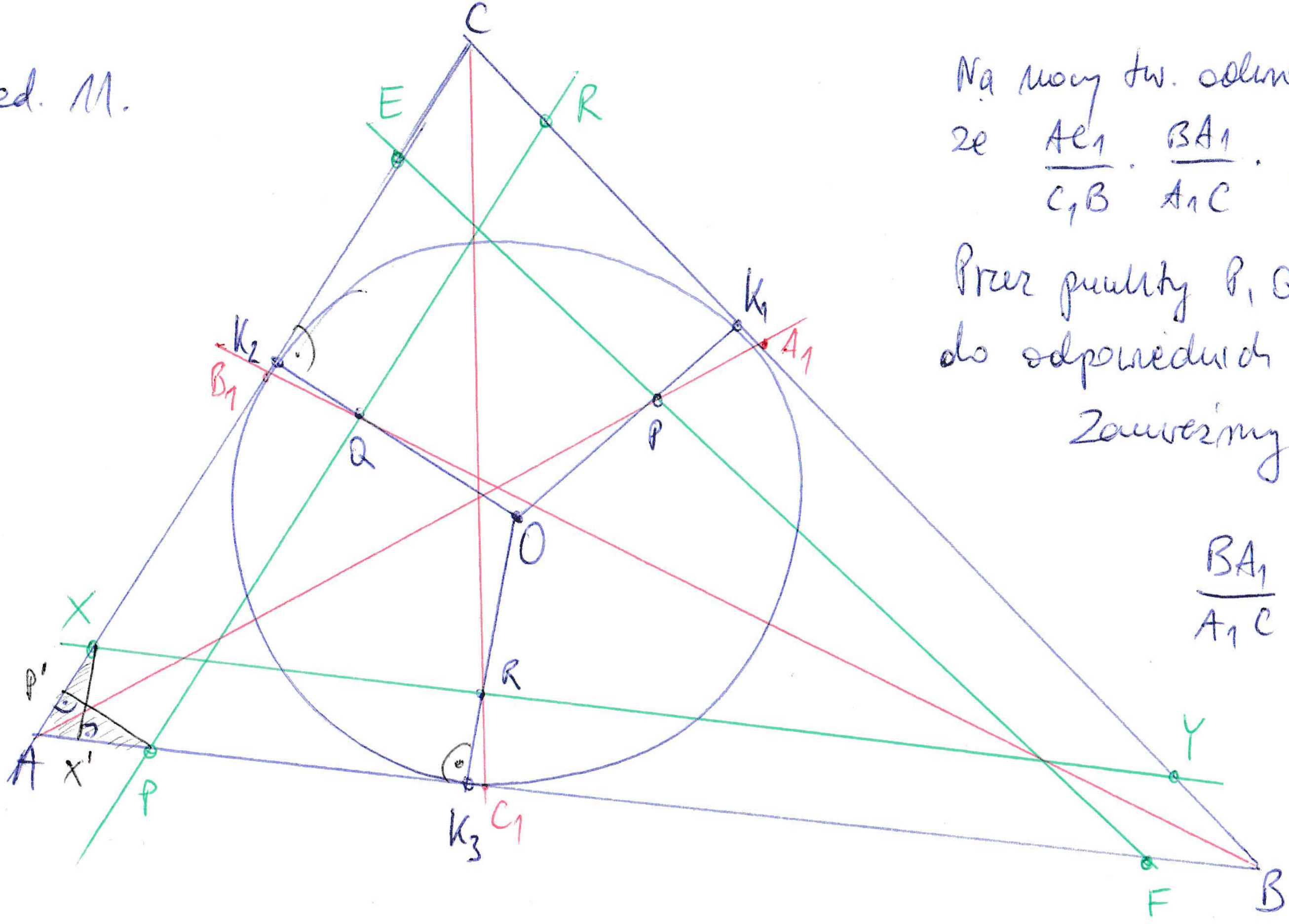


Niech E będzie takim punktem na DC że $DE = DA$, wówczas $EC = BC$.

Oznaczmy $\sphericalangle DAB = \alpha$ oraz $\sphericalangle ABC = \beta$. Niech AF będzie dwusieczną $\sphericalangle DAB$. Wystarczy wykazać że $\sphericalangle ABF = \frac{\beta}{2}$.

W trójkącie równoramiennym ADE mamy $\sphericalangle ADE = 180 - \beta$ bo czworokąt $ABCD$ jest wpisany. Stąd $\sphericalangle DEA = \frac{\beta}{2}$. Z drugiej strony w trójkącie równoramiennym EBC mamy $\sphericalangle CEB = \frac{\alpha}{2}$. Oznacza to że czworokąt $FABE$ można wpisać w okrąg. Stąd $\sphericalangle ABF = \sphericalangle AEF = \frac{\beta}{2}$ bo oba wpisane oparte na łuku $\widehat{AF}$.

Zad. 11.



Na mocy tw. odwrotnego do tw. Cevy wystarczy wykazać, że $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Przez punkty P, Q i R poprowadźmy proste równoległe do odpowiednich boków.

Zauważmy, że $\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{RQ}{QP}$, $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{XR}{RY}$ oraz $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{FP}{PE}$. Mnożąc stronami otrzymujemy

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{RQ}{QP} \cdot \frac{XR}{RY} \cdot \frac{FP}{PE}.$$

Wystarczy wykazać, że prawa strona jest równa 1.

Rozważmy trójkąty APP' oraz AXX':

$PP' = K_2Q = K_2O - OQ = OK_3 - OR = XX'$

Kąt A jest wspólny i oba są prostokątne, więc są przystające i $AX' = AP'$. Stąd

$XR = AK_3 - AX' = AK_2 - AP' = PQ$.

Analogicznie otrzymujemy $FP = YR$ oraz $RQ = EP$. Ostatecznie $\frac{RQ}{QP} \cdot \frac{XR}{RY} \cdot \frac{FP}{PE} = 1$.

Cbdo.