

XXII MISTRZOSTWA POLSKI W GEOMETRII ELEMENTARNEJ

WROCŁAW 8 VI 2024

Na rozwiązanie zadań (niekoniecznie wszystkich) masz 3 godziny zegarowe. Rozwiązanie każdego zadania zapisz na osobnej kartce opatrzonej imieniem i nazwiskiem, numerem zadania i symbolem kategorii. Zakończenie rozwiązywania każdego z zadań zgłoś dyżurnemu jurorowi przez podniesienie ręki. POWODZENIA!

Zad. 1. W trójkącie prostokątnym ABC spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego C dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości 4 i 9. Wysokość ta dzieli wyjściowy trójkąt na dwa mniejsze, w które wpisano okręgi, a ich środki połączoną prostą, która przecięła przyprostokątne trójkąta ABC w punktach K i L . Oblicz pole trójkąta KLC .

Zad. 2. W okrąg o_1 o średnicy AB wpisano trapez $ABCD$, a w ten trapez wpisano kolejny okrąg o_2 . Pole koła ograniczonego mniejszym okręgiem jest równe 1. Oblicz pole koła ograniczonego większym okręgiem.

Zad. 3. W trapezie prostokątnym $ABCD$ (mającym kąty proste w wierzchołkach A i D) długości podstaw wynoszą $|AB| = 9$ i $|CD| = 4$. Przez wierzchołki B i C poprowadzono okrąg styczny do ramienia AD . Jaka jest odległość punktu styczności od drugiego ramienia trapezu?

Zad. 4. We wnętrzu kwadratu $ABCD$ obrano punkt K , z którego widać bok AB pod kątem prostym. Półprosta CK przecina bok AB w punkcie E dzielącym go na odcinki o długościach $|AE| = 2$ i $|EB| = 1$. Oblicz pole trójkąta ABK .

Zad. 5. W równoległoboku $ABCD$ obrano na boku CD punkt K i połączono go z wierzchołkiem B odcinkiem, który przecięł przekątną AC w punkcie O . Okazało się, że pole trójkąta OBC wynosi 15, a pole czworokąta $AOKD$ wynosi 31. Oblicz pole równoległoboku.

Zad. 6. Okręgi s_1 i s_2 o środkach odpowiednio w O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B . Półprosta O_1B przecina s_2 w punkcie F , a półprosta O_2B przecina s_1 w punkcie E . Prosta równoległa do EF i przechodząca przez B przecina okręgi s_1 i s_2 odpowiednio w punktach M i N . Wykaż, że $|MN| = |AE| + |BF|$.

Zad. 7. Na kolejnych bokach prostokąta: AB , BC , CD i DE obrano odpowiednio punkty K , L , M , N różne od wierzchołków. Wiedząc, że $KL \parallel MN$ oraz $KM \perp LN$, wykaż, że punkt przecięcia odcinków KM i LN leży na przekątnej BD .

Zad. 8. Na jednym ramieniu kąta o wierzchołku O obrano punkt A , a na drugim ramieniu punkty B i C tak, że B leży między O i C . W trójkąt OAB wpisano okrąg o środku O_1 , a do trójkąta OAC dopisano okrąg o środku O_2 , styczny do boku AC . Wykaż, że jeśli $|AO_1| = |AO_2|$, to trójkąt ABC jest równoramienny.

Zad. 9. W trapez równoramienny $ABCD$ wpisano okrąg styczny do podstawy AB w punkcie M , do podstawy CD w N , a do ramienia BC w K . Wiedząc, że prosta BN dzieli odcinek MK na części o długościach 12 i 3, oblicz pole trapezu.

Zad. 10. W trójkącie równoramiennym, w którym $|AC| = |BC|$ i kąt C ma miarę 20° , na boku AC obrano punkt P , a na boku BC punkt R takie, że $|\angle RAB| = 60^\circ$ i $|\angle PBA| = 70^\circ$. Oblicz miarę kąta BPR .

Zad. 11. Przez środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostopadłą do IA przecinającą prostą BC w punkcie M . Niech D będzie rzutem prostokątnym I na prostą AM . Wykaż, że punkty A , B , C , D są współokręgowe.

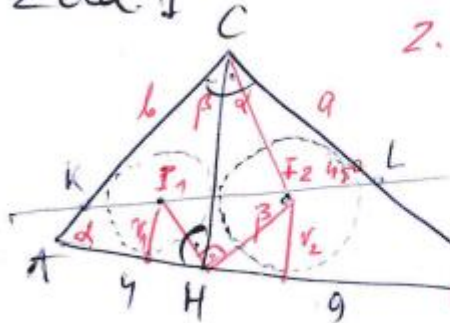
Zad. 12. Przez punkt P leżący na podstawie AB trójkąta równoramiennego ABC poprowadzono proste równoległe do boków AC i BC oraz przecinające je w punktach R i Q . Wykaż, że punkt P' – symetryczny do P względem prostej QR – leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC .

Zad 1

Oznaczmy $CB=a$ i $CA=b$ Z. ze $\triangle AHC \sim \triangle CHB$ stąd

$$\frac{r_1}{b} = \frac{r_2}{a} \Leftrightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow$$

$$\frac{r_1 \sqrt{2}}{r_2 \sqrt{2}} = \frac{b}{a} = \frac{I_1 D}{I_2 D} \text{ co}$$

oznacza że $\angle I_1 H I_2 = 45^\circ$ 

$I_1 H I_2$ i $\triangle ABC$ są podobne, przy czym $\angle I_1 I_2 D = \beta$
 stąd wynika że na odcinku HB I_2 może
 opisać okrąg oraz $\angle KLC = \angle I_2 HB = 45^\circ$. Zatem
 $\triangle KLC$ jest równoramienny przy czym $CK = CL$.
 $\angle I_2$ jest dwusieczną kąta $HCL = \alpha$ stąd trójkąt
 CHI_2 i $CI_2 L$ są przystające i $CI = CH$. Ale
 z własności trójkąta prostokątnego mamy $CH^2 = 4 \cdot 9$
 stąd $CH = 6$. Ostatecznie $S_{KLC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$

Zad 2

Oznaczmy $AB=a$ i $CD=b$. Z własności odcinkaopisanego mamy $CB = \frac{a+b}{2}$. Dalej z równościtrapezu wpisanego mamy $AH = \frac{a+b}{2}$, $HB = \frac{a-b}{2}$ oraz $\angle ACB = 90^\circ$ (bo oparty na średnicy AB)Z własności trójkąta prost. mamy $CH^2 = AH \cdot HB$ stąd $CH^2 = \frac{a^2 - b^2}{4}$ z kolei z tw. Pitagorasaw $\triangle CHB$ mamy $CH^2 = ab$ stąd $CH = \sqrt{ab}$.Otrzymujemy równanie $\frac{a^2 - b^2}{4} = ab \Leftrightarrow b^2 + 4ab - a^2 = 0 \quad | : b^2 \Leftrightarrow$ $1 + 4\left(\frac{a}{b}\right) - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 0$ stąd $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{5}$. Zauważmy teraz że $r = \frac{1}{2} CH = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ oraz $R = \frac{a}{2}$. Stąd podobieństwo okręgów $k = \frac{R}{r} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{ab}}{2}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ stąd $P_2 = k^2 \cdot P_1 = (2 + \sqrt{5}) \cdot 1 = 2 + \sqrt{5}$.

Zad 3

$\angle DEC = \angle DAE$ (kąt dopinany) stąd

$\triangle DEC \sim \triangle FAE$ (D L)

Mamy zatem $\frac{b}{DE} = \frac{x}{AE} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{AE}{DE}$

Analogicznie $\triangle FED \sim \triangle ABE$

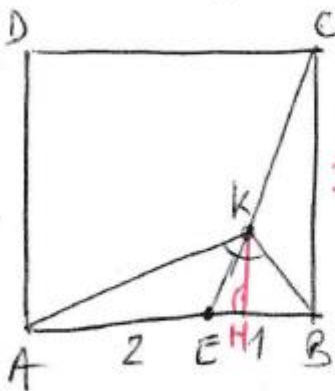
stąd $\frac{x}{a} = \frac{DE}{AE}$. Mnożąc

showujemy stąd $\frac{x^2}{ab} = \frac{AE}{DE} \cdot \frac{DE}{AE} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$

= 6.

Zad 4

Oznaczmy $KH = h$ wysokość w $\triangle AKB$.
Niech $EH = d$ wówczas $HB = 1-d$.



2 tw. Talesa $\frac{CB}{EB} = \frac{KH}{EH} \Leftrightarrow$

$\frac{3}{1} = \frac{h}{d}$ stąd $h = 3d$. 2 ut.

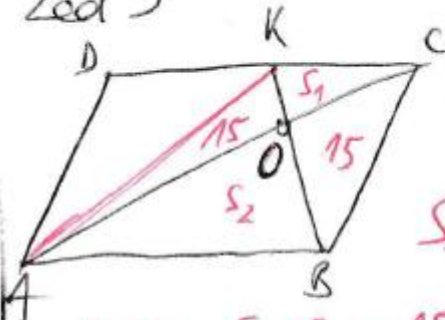
3 tw. Pytagorasa $h^2 = d^2 + (1-d)^2$ zatem

$9d^2 = d^2 - d + 1$ stąd $d = \frac{2}{5}$

i $h = \frac{6}{5}$. Stąd $S_{AKB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{6}{5}$

$= \frac{9}{5}$

Zad 5



Rozważmy trapez ABCK. Mamy $S_{AOK} = S_{OBC} = 15$
(optymistycznie). Oznaczmy $S_{KOC} = S_1$ i $S_{AOB} = S_2$.

Zatem $\frac{1}{2} S_{ABCD} = S_{ABC} = S_2 + 15 = 31 + S_1$ stąd

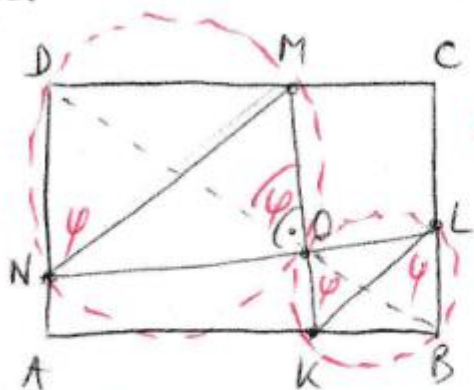
$S_1 = S_2 - 16$. Ze znanej własności równoległa

mamy $S_1 \cdot S_2 = 15 \cdot 15 \Leftrightarrow (S_2 - 16) S_2 = 225$ stąd $S_2 = 25$

Zatem $\frac{1}{2} S_{ABCD} = 25 + 15 = 40$ i stąd $S_{ABCD} = 80$

Zad 7

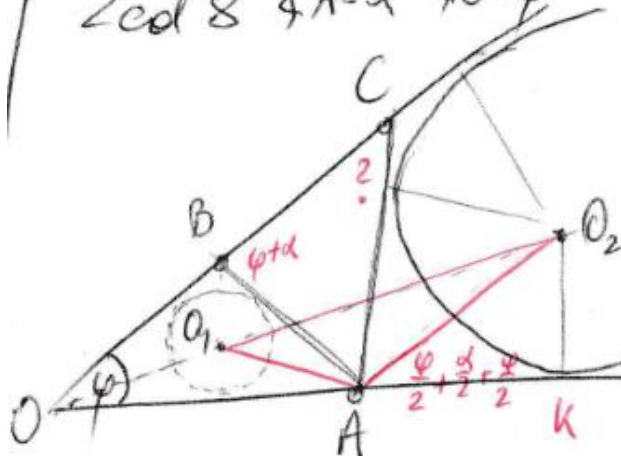
Z.ze me NOM i KBLO moze



opisai okreg ($\angle D + \angle B = 180^\circ$)
 meci $\angle DOM = \varphi$, wówczas
 $\angle ONM = \varphi$ (opisany) $\Rightarrow$
 $\angle KLB = \varphi$ (z niewidoczności)
 $= \angle KOB$. Który oznacza

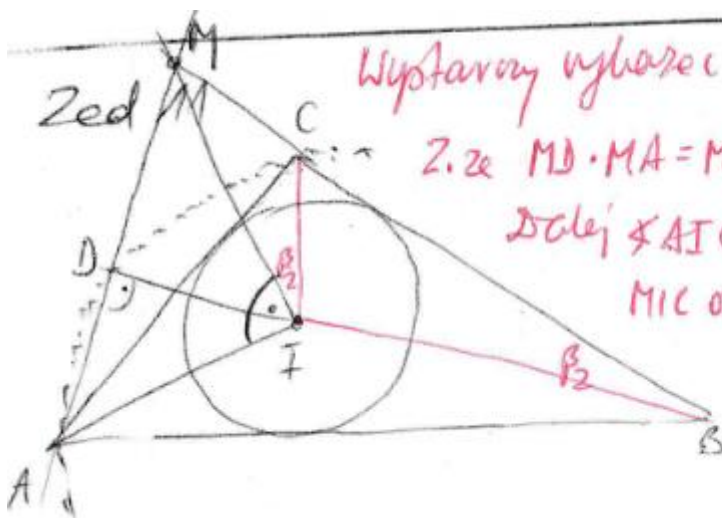
kawa DOM i KOB są równe, a M, O, K współliniowe
 to $\angle O, B$ też są współliniowe. Cbalo.

Zad 8 $\angle A = \alpha$ $\angle O = \varphi$



$AO_1 = AO_2 \Rightarrow \angle AO_1O_2 = \angle AO_2O_1 = \frac{\varphi}{2} + \frac{\alpha}{2}$
 (zewnętrzny dla $\triangle OAO_1$). $\angle CBA = \varphi + \alpha$.
 $\angle C = \angle CAK - \varphi$ (opisany). z kolei
 $\angle CAK = 2 \angle KAO_2 = 2 \cdot (\varphi + \frac{\alpha}{2}) = 2\varphi + \alpha$.
 Ost. $\angle C = \varphi + \alpha$ cbalo.

ZAD. 10. STEFAN MIZIA



Wystarczy wykazać że $MD \cdot MA = MC \cdot MB$ (tw. o dwóch
 przeciętych)

Z.ze $MD \cdot MA = MI^2$ (wł. mójh. prost.)

Dalej $\angle AIC = 90^\circ + \beta_2 \Rightarrow \angle MIC = \beta_2 \Rightarrow$ trójkąty
 MIC oraz MIB są podobne. Zatem

$$\frac{MC}{MI} = \frac{MI}{MB} \Rightarrow MI^2 = MC \cdot MB \text{ cbalo.}$$

