

Nierówności udowodniane przy użyciu indukcji matematycznej

Zadanie 1

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi

$$1 + 2 + \cdots + n > \frac{n^2}{2}.$$

Dowód. Niech $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

1° Podstawa: dla $n = 1$:

$$S_1 = 1 > \frac{1}{2}.$$

2° Krok: Załóżmy, że dla pewnego $n \geq 1$ zachodzi $S_n > \frac{n^2}{2}$. Wtedy

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) > \frac{n^2}{2} + (n+1).$$

A ponieważ

$$\frac{n^2}{2} + (n+1) > \frac{n^2}{2} + n + \frac{1}{2} = \frac{(n+1)^2}{2},$$

to $S_{n+1} > \frac{(n+1)^2}{2}$. Zatem teza zachodzi dla wszystkich $n \geq 1$. □

Zadanie 2

Dla jakich liczb naturalnych n zachodzi nierówność

$$30n < 2^n + 110? \quad (\star)$$

1) Pozorny dowód indukcyjny (błędny)

Krok bazowy. Dla $n = 1$ mamy

$$30 < 2 + 110 = 112,$$

czyli nierówność jest spełniona.

Krok indukcyjny (pozorny). Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$30n < 2^n + 110.$$

Wtedy

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^n + 140.$$

Teraz *rzekomo* zauważamy, że

$$2^n + 140 \leq 2^{n+1} + 110,$$

bo $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ i „podwojenie” powinno przykryć dodatkowe 30. Stąd miałyby wynikać

$$30(n+1) < 2^{n+1} + 110,$$

czyli teza dla $n+1$.

Wniosek z tego rozumowania byłby absurdalny, bo np. dla $n = 6$:

$$30 \cdot 6 = 180 \not< 2^6 + 110 = 64 + 110 = 174.$$

Czyli dowód musi mieć błąd.

2) Gdzie jest błąd?

Błąd jest dokładnie w przejściu

$$2^n + 140 \leq 2^{n+1} + 110.$$

Po przekształceniu:

$$2^n + 140 \leq 2 \cdot 2^n + 110 \iff 30 \leq 2^n.$$

A to **nie jest prawdą dla wszystkich n** (np. $2^4 = 16 < 30$). Czyli w kroku indukcyjnym *ukryto dodatkowe założenie* $2^n \geq 30$.

3) Dowód poprawny

Pokażemy, że nierówność $(\star)$ zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Krok 1: sprawdzenie małych wartości. Wystarczy policzyć do momentu, aż 2^n na pewno przewyższa 30. Sprawdzamy:

$$\begin{aligned} n = 1 : \quad & 30 < 2 + 110, \\ n = 2 : \quad & 60 < 4 + 110, \\ n = 3 : \quad & 90 < 8 + 110, \\ n = 4 : \quad & 120 < 16 + 110, \\ n = 5 : \quad & 150 < 32 + 110. \end{aligned}$$

Wszystkie nierówności są prawdziwe.

Krok 2: indukcja od $n_0 = 5$. Załóżmy, że dla pewnego $n \geq 5$ zachodzi

$$30n < 2^n + 110.$$

Wtedy

$$30(n+1) = 30n + 30 < 2^n + 110 + 30 = 2^n + 140.$$

Ponieważ $n \geq 5$, to $2^n \geq 2^5 = 32$, a więc $30 \leq 2^n$. Zatem

$$2^n + 140 \leq 2^n + 110 + 2^n = 2^{n+1} + 110.$$

Łącząc oba kroki, dostajemy

$$30(n+1) < 2^{n+1} + 110.$$

Czyli teza zachodzi dla $n+1$.

Wraz z bazą $n = 5$ daje to prawdziwość dla wszystkich $n \geq 5$, a ponieważ $n = 1, 2, 3, 4$ sprawdziliśmy osobno, nierówność zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Zadanie 3

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi

$$3^{28}n \leq 3^n + 3^{31}.$$

Dowód. Dowód dzielimy na dwa przypadki.

Przypadek I: $1 \leq n \leq 27$. Wtedy

$$3^{28}n \leq 3^{28} \cdot 27 = 3^{31} \leq 3^n + 3^{31}.$$

Przypadek II: $n \geq 28$. Indukcja od $n_0 = 28$.

1° Dla $n = 28$:

$$3^{28} \cdot 28 = 3^{28}(1 + 27) = 3^{28} + 3^{31}.$$

2° Załóżmy, że dla pewnego $n \geq 28$:

$$3^{28}n \leq 3^n + 3^{31}.$$

Wtedy

$$3^{28}(n+1) = 3^{28}n + 3^{28} \leq (3^n + 3^{31}) + 3^{28}.$$

Ponieważ $n \geq 28$, mamy $3^{28} \leq 3^n$, więc

$$(3^n + 3^{31}) + 3^{28} \leq (3^n + 3^{31}) + 3^n = 2 \cdot 3^n + 3^{31} \leq 3 \cdot 3^n + 3^{31} = 3^{n+1} + 3^{31}.$$

Zatem nierówność zachodzi dla $n+1$. □

Zadanie 4

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi

$$2^{65}n \leq 2^n + 2^{71}.$$

Dowód. Dowód dzielimy na dwa przypadki.

Przypadek I: $1 \leq n \leq 64$.

$$2^{65}n \leq 2^{65} \cdot 64 = 2^{71} < 2^n + 2^{71}.$$

Przypadek II: $n \geq 65$. Indukcja od $n_0 = 65$.

1° Dla $n = 65$:

$$2^{65} \cdot 65 = 2^{65}(1 + 64) = 2^{65} + 2^{71}.$$

2° Załóżmy, że dla pewnego $n \geq 65$:

$$2^{65}n \leq 2^n + 2^{71}.$$

Wtedy

$$2^{65}(n+1) = 2^{65}n + 2^{65} \leq (2^n + 2^{71}) + 2^{65}.$$

Ponieważ $n \geq 65$, mamy $2^{65} \leq 2^n$, więc

$$(2^n + 2^{71}) + 2^{65} \leq (2^n + 2^{71}) + 2^n = 2^{n+1} + 2^{71}.$$

Zatem zachodzi dla $n+1$. □

Zadanie 5

Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ zachodzi

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 < \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{10}.$$

Oznaczmy $S_n = \sum_{k=1}^n k^4$ oraz

$$R_n = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)}{10}.$$

Dowód. **1° Podstawa:** $n = 1$:

$$S_1 = 1, \quad R_1 = \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3}{10} = \frac{12}{10} = 1.2,$$

więc $S_1 < R_1$.

2° Krok: Załóżmy $S_n < R_n$ dla pewnego $n \geq 1$. Wtedy

$$S_{n+1} = S_n + (n+1)^4 < R_n + (n+1)^4.$$

Wystarczy więc pokazać $R_n + (n+1)^4 < R_{n+1}$, czyli $R_{n+1} - R_n > (n+1)^4$.

Liczymy:

$$R_{n+1} - R_n = \frac{(n+1)^2(n+2)^2(2n+3) - n^2(n+1)^2(2n+1)}{10} = \frac{(n+1)^2}{10} \left((n+2)^2(2n+3) - n^2(2n+1) \right).$$

Rozwijamy nawias:

$$(n+2)^2(2n+3) - n^2(2n+1) = 10(n+1)^2 + 2.$$

Zatem

$$R_{n+1} - R_n = \frac{(n+1)^2}{10} (10(n+1)^2 + 2) = (n+1)^4 + \frac{(n+1)^2}{5} > (n+1)^4.$$

Stąd $S_{n+1} < R_{n+1}$. Koniec dowodu. □

Indukcja wsteczna w dowodzie nierówności między średnimi (AM–GM)

Udowodnimy, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, \dots, a_n > 0$ zachodzi

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Oznaczmy to zdanie przez $T(n)$.

Krok 1: $T(1)$ i $T(2)$

1° $T(1)$ jest oczywiste: $a_1 \leq a_1$.

2° $T(2)$ (AM–GM dla dwóch liczb): dla $x, y > 0$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \implies x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0 \implies \sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}.$$

Reguła 1: podwajanie $T(n) \Rightarrow T(2n)$

Lemat 1 (Reguła 1). *Jeśli $T(n)$ zachodzi, to zachodzi też $T(2n)$.*

Dowód. Weźmy $a_1, \dots, a_{2n} > 0$. Oznaczmy

$$G_1 = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}, \quad G_2 = \sqrt[n]{a_{n+1} \cdots a_{2n}},$$
$$A_1 = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \quad A_2 = \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n}.$$

Z założenia $T(n)$ mamy $G_1 \leq A_1$ oraz $G_2 \leq A_2$. Zatem

$$\sqrt[2n]{a_1 \cdots a_{2n}} = \sqrt{G_1 G_2} \leq \sqrt{A_1 A_2}.$$

Stosujemy $T(2)$ do liczb A_1, A_2 :

$$\sqrt{A_1 A_2} \leq \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} + \frac{a_{n+1} + \cdots + a_{2n}}{n} \right) = \frac{a_1 + \cdots + a_{2n}}{2n}.$$

Czyli $T(2n)$ zachodzi. □

Reguła 2: krok w tył $T(n) \Rightarrow T(n-1)$

Lemat 2 (Reguła 2). *Jeśli $T(n)$ zachodzi dla $n \geq 2$, to zachodzi też $T(n-1)$.*

Dowód. Weźmy $a_1, \dots, a_{n-1} > 0$ i oznaczmy ich średnią arytmetyczną

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}.$$

Dołóżmy n -tą liczbę równą A . Wtedy średnia arytmetyczna z n liczb wynosi również A :

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + A}{n} = \frac{(n-1)A + A}{n} = A.$$

Stosujemy $T(n)$ do liczb $a_1, \dots, a_{n-1}, A$:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_{n-1} \cdot A} \leq A.$$

Podnosimy do potęgi n i dzielimy przez $A > 0$:

$$a_1 \cdots a_{n-1} \leq A^{n-1}.$$

Bierzemy pierwiastek $(n-1)$ -tego stopnia:

$$\sqrt[n-1]{a_1 \cdots a_{n-1}} \leq A = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}.$$

To jest $T(n-1)$. □

Zakończenie: dlaczego to dowodzi $T(n)$ dla każdego n ?

Z $T(2)$ i Reguły 1 dostajemy $T(4), T(8), T(16), \dots$, czyli $T(2^k)$ dla każdego k . Następnie, z Reguły 2 możemy schodzić w dół:

$$T(2^k) \Rightarrow T(2^k - 1) \Rightarrow \dots \Rightarrow T(m)$$

dla dowolnego $m \leq 2^k$. Wybierając k tak, by $2^k \geq m$, dostajemy $T(m)$ dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$. To kończy dowód AM–GM dla każdego n .