

Symulacja OMJ – zestaw I.1

11. Niech $(a_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem nieujemnych liczb całkowitych takim, że $a_n \geq a_{2n} + a_{2n+1}$ dla wszystkich $n \geq 1$. Udowodnij, że dla dowolnej dodatniej liczby całkowitej N możemy znaleźć N kolejnych wyrazów tego ciągu, z których wszystkie są równe zero.

Rozwiązanie: Pokażmy najpierw, że co najmniej jeden wyraz ciągu jest równy zero. Przypuśćmy, że jest inaczej, to znaczy, że wszystkie wyrazy są dodatnimi liczbami całkowitymi. Ale wtedy:

$$a_1 \geq a_2 + a_3 \geq a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \geq \dots \geq a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}-1} \geq 2^n,$$

dla wszystkich $n \geq 1$, co jest absurdem. Zatem co najmniej jeden wyraz, powiedzmy a_k , jest równy zero. Wtedy jednak:

$$0 = a_k \geq a_{2k} + a_{2k+1} \geq \dots \geq a_{2^n k} + a_{2^n k+1} + \dots + a_{2^{n+1}k-1},$$

stąd $a_{2^n k} = a_{2^n k+1} = \dots = a_{2^{n+1}k-1} = 0$. Znaleźliśmy w ten sposób 2^n kolejnych wyrazów naszego ciągu, z których wszystkie są równe zero, co w oczywisty sposób dowodzi tezy. Uwaga: Nietrywialnym przykładem takiego ciągu jest następujący ciąg: $a_n = 1$, jeśli $n = 2^k$ dla pewnej liczby całkowitej k , oraz $a_n = 0$ w przeciwnym wypadku.

12. Niech a, b i c będą długościami boków trójkąta. Udowodnij, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geq \max(a, b, c).$$

Rozwiązanie: Załóżmy, bez straty ogólności, że $a \geq b \geq c$. Musimy udowodnić, że

$$\sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{2}} \geq a,$$

co jest równoważne nierówności

$$-a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq 0.$$

Ponieważ $-a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = (-a)^3 + b^3 + c^3 - 3(-a)bc$, to ostatnie wyrażenie można rozłożyć na czynniki postaci:

$$\frac{1}{2}(-a + b + c)((a + b)^2 + (a + c)^2 + (b - c)^2).$$

Teza wynika teraz bezpośrednio z nierówności trójkąta: mianowicie $b + c > a$ w dowolnym trójkącie.

13. Dodatnie liczby całkowite od 1 do n^2 ($n \geq 2$) są rozmieszczone w sposób dowolny na polach szachownicy o wymiarach $n \times n$. Udowodnij, że istnieją dwa sąsiednie pola (mające wspólny wierzchołek lub wspólny bok) takie, że różnica liczb umieszczonych na nich jest nie mniejsza niż $n + 1$.

Rozwiązanie: Przypuśćmy, że jest przeciwnie: różnica liczb umieszczonych na jakichkolwiek sąsiednich polach jest mniejsza niż $n + 1$. Jeśli postawimy króla na dowolnym polu szachownicy, to może on dotrzeć na każde inne pole w co najwyżej $n - 1$ ruchach po polach sąsiednich. Umieśćmy króla na polu z liczbą 1 i przesuwamy go na pole z liczbą n^2 w co najwyżej $n - 1$ ruchach. W każdym ruchu różnica między liczbami na sąsiednich polach wynosi mniej niż $n + 1$, zatem różnica między n^2 a 1 jest mniejsza niż $(n + 1)(n - 1) = n^2 - 1$, co prowadzi do oczywistej sprzeczności.

Symulacja OMJ – zestaw I.2

14. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym. Dla punktu M znajdującego się wewnątrz trójkąta, oznaczmy przez D, E, F odpowiednio spodki rzutów prostokątnych punktu M na boki BC, CA, AB . Znajdź miejsce geometryczne punktów M , dla których kąt $\angle FDE = \pi/2$.

Rozwiązanie: Korzystając z własności czworokątów wpisanych w okrąg ($MDBF$ oraz $MDCE$), otrzymujemy równości kątów: $\angle MDF = \angle MBF$ oraz $\angle MDE = \angle MCE$. Wynika stąd, że $\angle FDE = \pi/2$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\angle MBF + \angle MCE = \pi/2$, lub równoważnie, gdy $\angle BMC = 5\pi/6$. Zachodzi to dla wszystkich punktów M leżących na odpowiednim łuku okręgu przechodzącego przez wierzchołki B i C .

15. Niech $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej $n \geq 3$ zbiór A zawiera niestały ciąg arytmetyczny o długości n , ale nie zawiera żadnego nieskończonego, niestałego ciągu arytmetycznego.

Rozwiązanie: Dla $n = 3$ mamy niemal oczywisty przykład: $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Zapisanie go w postaci $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}$ może dać nam wskazówkę co do ogólnego przypadku. Rozważmy ciąg arytmetyczny:

$$\frac{1}{n!}, \frac{2}{n!}, \dots, \frac{n}{n!}.$$

Kiedy zapiszemy te ułamki w postaci nieskracalnej, zobaczymy, że wszystkie one należą do zbioru A . Odnośnie drugiej części tezy wystarczy zauważyć, że każdy niestały, nieskończony ciąg arytmetyczny jest z konieczności ciągiem nieograniczonym. Ponieważ zbiór A jest ograniczony (największa wartość to 1), nie może on zawierać takiego ciągu.

Symulacja OMJ – zestaw II.1

21. Niech p będzie liczbą pierwszą. Wyznacz wszystkie $k \in \mathbb{Z}$ takie, że $\sqrt{k^2 - pk}$ jest dodatnią liczbą całkowitą.

Rozwiązanie: Szukane wartości to $k = (p+1)^2/4$ dla nieparzystych liczb p (dla $p = 2$ rozwiązań nie ma). Rozpatrzmy najpierw przypadek $p = 2$. Wymagałoby to, by wyrażenie $k^2 - 2k = (k-1)^2 - 1$ było dodatnim kwadratem liczby całkowitej. Jest to jednak niemożliwe, ponieważ jedyne dwa kolejne kwadraty liczb całkowitych to 0 i 1. Załóżmy teraz, że p jest nieparzyste. Na początku możemy odrzucić scenariusz, w którym k dzieli się przez p : jeśli $k = np$, to $k^2 - pk = p^2n(n-1)$. Ponieważ n oraz $n-1$ są względnie pierwsze, nie mogą być jednocześnie kwadratami. Zakładamy więc, że k oraz p są względnie pierwsze, skąd wynika, że k oraz $k-p$ również są względnie pierwsze. Wyrażenie $k^2 - pk = k(k-p)$ jest zatem kwadratem wtedy i tylko wtedy, gdy oba jego czynniki są kwadratami: niech $k = m^2$ oraz $k-p = n^2$. Wówczas otrzymujemy $p = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$. Skoro p jest liczbą pierwszą, pociąga to za sobą $m+n = p$ oraz $m-n = 1$, co jednoznacznie wyznacza $k = (p+1)^2/4$.

22. Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite a, b takie, że iloczyn

$$(a+b^2)(b+a^2)$$

jest potęgą liczby 2.

Rozwiązanie: Zauważmy na początku, że a i b muszą być tej samej parzystości. Niech $a+b^2 = 2^m$ oraz $b+a^2 = 2^n$ i załóżmy, że $m \geq n$. Wtedy $a+b^2 \geq b+a^2$, czyli $b^2 - b \geq a^2 - a$, co pociąga za sobą $b \geq a$. Odejmując te dwie równości stronami, otrzymujemy

$$(b-a)(a+b-1) = 2^m - 2^n = 2^n(2^{m-n} - 1).$$

Ponieważ $a+b-1$ jest liczbą nieparzystą, wynika stąd, że 2^n dzieli $b-a$. Niech $b-a = 2^nc$ dla pewnej całkowitej nieujemnej liczby c . Wtedy $b = 2^nc + a = 2^n - a^2$, a zatem $a+a^2 = 2^n(1-c)$, co oznacza, że $c = 0$ (ponieważ $a+a^2 > 0$), a stąd $a = b$. Ostatecznie wnioskujemy, że $a(a+1)$ jest potęgą liczby 2, a to jest możliwe tylko dla $a = 1$. Zatem jedynym rozwiązaniem jest $a = 1, b = 1$.

23. Niech n będzie nieparzystą dodatnią liczbą całkowitą. Na pewnym polu ustawiono n graczy w paintball w taki sposób, że odległości między każdą parą z nich są różne. Na dany sygnał każdy z graczy strzela kulą z farbą do

najbliższego sobie gracza. Udowodnij, że: (a) co najmniej jeden gracz nie zostanie trafiony; (b) żaden gracz nie zostanie trafiony więcej niż pięć razy; (c) tory lotu kulek się nie przecinają.

Rozwiązanie: (a) Rozważmy dwóch graczy znajdujących się najbliżej siebie. Strzelą oni do siebie nawzajem. Jeśli ktokolwiek inny strzeli do któregośkolwiek z tej dwójki, z pewnością jakiś gracz pozostanie nietrafiony (wystrzelono n kulek, więc jeśli ktoś ma na sobie więcej niż jedno trafienie, ktoś inny unika trafienia). Jeśli nie, odrzucamy tę dwójkę z rozważań i powtarzamy rozumowanie dla pozostałych $n - 2$ graczy. Ponieważ n jest nieparzyste, ostatecznie dochodzimy do przypadku $n = 3$, w którym wniosek ten jest oczywisty. (b) Przypuśćmy, że gracz A został trafiony przez co najmniej sześciu innych graczy, oznaczonych jako $A_1, \dots, A_6$. Jeden z sześciu kątów o wierzchołku w punkcie A ma miarę co najwyżej 60° . Załóżmy, że $\angle A_1AA_2$ jest takim kątem. W trójkącie A_1AA_2 jeden z pozostałych dwóch kątów, powiedzmy przy wierzchołku A_2 , jest ściśle większy niż 60° . Wtedy $AA_1 > A_1A_2$. Skoro jednak to A_1 strzelił do A , a nie do A_2 , musi zachodzić $AA_1 < A_1A_2$, co prowadzi do sprzeczności. (c) Przypuśćmy, że A strzela do B , C strzela do D , a odcinki AB i CD przecinają się w punkcie O . Wtedy $AB < AD$ oraz $CD < BC$. Stąd w czworokącie wypukłym $ACBD$ zachodzi $AB + CD < AD + BC$, co jest sprzeczne z podstawową własnością czworokątów wypukłych (suma długości przekątnych musi być większa od sumy długości przeciwległych boków).

Symulacja OMJ – zestaw II.2

24. Udowodnij, że równanie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2011^{2011} + 2012$$

nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

Rozwiązanie: Zauważmy na początku, że kwadrat liczby całkowitej może przystawać jedynie do 0, 1 lub 4 modulo 8. Sprawdźmy prawą stronę równania modulo 8. Mamy

$$2011 \equiv 3 \pmod{8},$$

stąd

$$2011^{2011} \equiv 3^{2011} = (3^2)^{1005} \cdot 3 \equiv 1^{1005} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{8},$$

a ponieważ

$$2012 \equiv 4 \pmod{8},$$

wynika z tego, że

$$2011^{2011} + 2012 \equiv 7 \pmod{8}.$$

Ostatecznie wystarczy zauważyć, że suma trzech (niekoniecznie różnych) liczb ze zbioru $\{0, 1, 4\}$ nie może dać reszty 7 modulo 8, a zatem równanie to nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych.

25. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi nierówność

$$AB + BD \leq AC + CD.$$

Udowodnij, że $AB < AC$.

Rozwiązanie: Niech O będzie punktem przecięcia przekątnych AC i BD . W trójkątach AOB i COD z nierówności trójkąta mamy $AB < AO + OB$ oraz $CD < CO + OD$. Dodając te nierówności stronami, otrzymujemy

$$AB + CD < AC + BD.$$

Dodając tę wynikową nierówność do nierówności $AB + BD \leq AC + CD$ z treści zadania, uzyskujemy

$$2AB + CD + BD < 2AC + BD + CD,$$

co po uproszczeniu daje $2AB < 2AC$, a stąd $AB < AC$.

Symulacja OMJ – zestaw III.1

- 31.** Niech $m = 30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ i niech M będzie zbiorem jej dodatnich dzielników, z których każdy ma dokładnie dwa czynniki pierwsze. Wyznacz najmniejszą liczbę całkowitą n o następującej własności: dla dowolnego wyboru n liczb ze zbioru M , istnieją wśród nich takie trzy liczby a, b, c , które spełniają warunek $a \cdot b \cdot c = m$.

Rozwiązanie: Odpowiedź: $n = 11$. Zbiór M ma łącznie $\binom{6}{2} = 15$ elementów (dzielników o dokładnie dwóch czynnikach pierwszych). Zauważmy najpierw, że wybierając 10 dzielników, w których rozkładzie nie występuje liczba pierwsza 13, nie jesteśmy w stanie utworzyć iloczynu dającego m (ponieważ będzie brakowało nam w nim czynnika 13). Dowodzi to, że szukane $n \geq 11$. Rozważmy teraz podział 15 dzielników zbioru M na pięć trójelementowych rozłącznych grup, dobranych w taki sposób, aby iloczyn liczb w każdej z grup był równy dokładnie m : $\{2 \cdot 3, 5 \cdot 13, 7 \cdot 11\}$, $\{2 \cdot 5, 3 \cdot 7, 11 \cdot 13\}$, $\{2 \cdot 7, 3 \cdot 13, 5 \cdot 11\}$, $\{2 \cdot 11, 3 \cdot 5, 7 \cdot 13\}$, $\{2 \cdot 13, 3 \cdot 11, 5 \cdot 7\}$. Jeśli z tak przygotowanych 15 liczb wybierzemy $n = 11$ elementów, to na mocy zasady szufladkowej Dirichleta, co najmniej z jednej grupy (z powyższych pięciu) zostaną wybrane wszystkie trzy liczby. Ich iloczyn wynosi m . Stąd $n = 11$ jest odpowiedzią.

- 32.** Znajdź wszystkie dodatnie liczby całkowite $n = p_1 p_2 \dots p_k$, które dzielą iloczyn $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1)$, gdzie $p_1 p_2 \dots p_k$ jest rozkładem liczby n na czynniki pierwsze (niekoniecznie różne).

Rozwiązanie: Odpowiedź: Wszystkie liczby postaci $2^r 3^s$, gdzie r i s są całkowitymi liczbami nieujemnymi spełniającymi $s \leq r \leq 2s$. Niech $m = (p_1 + 1)(p_2 + 1) \dots (p_k + 1)$. Możemy bez straty ogólności założyć, że to p_k jest największym czynnikiem pierwszym. Jeśli $p_k > 3$, to liczba pierwsza p_k w ogóle nie może dzielić m . Dzieje się tak, ponieważ jeśli p_i dzieli m , to musi być czynnikiem pierwszym wyrażenia $p_i + 1$ dla pewnego i . Zauważmy jednak, że jeśli $p_i = 2$, to $p_i + 1 = 3 < p_k$, a w przeciwnym wypadku (gdy p_i jest nieparzyste) liczba $p_i + 1$ jest liczbą parzystą, której czynnikami są co najwyżej 2 oraz $\frac{1}{2}(p_i + 1)$ i oba z nich są ściśle mniejsze od p_k . Zatem nie istnieje żaden czynnik $p_i + 1$ mogący dostarczyć liczbę p_k do rozkładu. Oznacza to, że jedynymi liczbami pierwszymi, które mogą wystąpić w rozkładzie i dzielić n , są 2 i 3. Zatem możemy zapisać, że $n = 2^r 3^s$. Wówczas wyrażenie $m = (2 + 1)^r (3 + 1)^s = 3^r 4^s = 2^{2s} 3^r$. Aby m dzieliło się przez $n = 2^r 3^s$, potęgi czynników pierwszych muszą pozwalać na swobodne dzielenie, co zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $s \leq r$ oraz $r \leq 2s$, co można skrócić do postaci $s \leq r \leq 2s$.

- 33.** Dana jest tablica o wymiarach $m \times n$, w której w każdym polu wpisano liczbę $+1$ lub -1 . Wiadomo, że początkowo w tablicy znajduje się dokładnie jedno -1 , a wszystkie pozostałe liczby to $+1$. W jednym ruchu wolno wybrać dowolne pole zawierające -1 , zamienić to -1 na 0 , a jednocześnie pomnożyć przez -1 wszystkie liczby we wszystkich jego sąsiednich polach (mówimy, że dwa pola są sąsiednie, jeśli mają wspólny bok). Znajdź wszystkie pary wymiarów (m, n) , dla których za pomocą serii takich ruchów można otrzymać tablicę zawierającą same zera, niezależnie od pola, w którym znajdowało się początkowe -1 .

Rozwiązanie: Odpowiedź: Wszystkie takie pary (m, n) , dla których co najmniej jedna z liczb m, n jest nieparzysta. Wymażmy odcinek jednostkowy stanowiący wspólny bok dowolnych dwóch pól za każdym razem, gdy pojawiają się na nich sąsiadujące ze sobą zera. Jeśli ostateczna tablica ma składać się z samych zer, to wszystkie wewnętrzne odcinki jednostkowe (z wyjątkiem tych należących do obwodu zewnętrznego tablicy) zostaną wymazane. Wymaga to wymazania łącznie $m(n-1) + n(m-1) = 2mn - m - n$ odcinków jednostkowych. Z drugiej strony, aby otrzymać docelowe zero w jakimś polu z początkową wartością $+1$, należy najpierw uzyskać w tym polu wartość -1 . To z kolei wymaga, aby znak liczby w tym polu uległ zmianie nieparzystą liczbę razy (mianowicie 1 lub 3 razy). Oznacza to, że każde pole z -1 (z wyjątkiem tego początkowego) musi na pewnym etapie sąsiadować z nieparzystą liczbą wprowadzonych już zer. Zatem za każdym razem, gdy wykonujemy ruch i podmieniamy -1 na 0 , wymazujemy również nieparzystą liczbę odcinków jednostkowych wokół tego pola. Wynika z tego, że całkowita liczba wymazanych w procesie odcinków jednostkowych przystaje modulo 2 do początkowej liczby elementów $+1$ zlokalizowanych w tablicy. Otrzymujemy zatem kongruencję:

$$2mn - m - n \equiv mn - 1 \pmod{2},$$

co łatwo przekształca się do warunku:

$$(m-1)(n-1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Z warunku tego wprost wynika, że co najmniej jedna z liczb m, n musi być nieparzysta.

Pozostaje jeszcze wykazać, że faktycznie w takim przypadku wyzerowanie jest możliwe. Załóżmy bez straty ogólności, że n jest nieparzyste. Jeśli wyjściowe -1 znajduje się w i -tym wierszu, wykonując ruchy w odpowiedniej kolejności z łatwością możemy sprawić, by ten konkretny wiersz zawierał same zera, podczas gdy jego sąsiedzi (jeden lub dwa sąsiadujące wiersze) będą składać się z samych -1 . Następnie, operując na dowolnym wierszu złożonym z samych -1 , najpierw zamieniamy w nim wartości z nieparzystych kolumn (tzn. kolumn o numerach $1, 3, \dots, n$) na zera. Ponieważ sąsiadujące operacje będą odbijać znak w parzystych kolumnach dwukrotnie, wiersz uzyska postać naprzemienną: $0, -1, 0, -1, \dots$. W tej konfiguracji wystarczy "wyklikać" zera na pozycjach z pozostałymi wciąż -1 , aby błyskawicznie zamienić cały wiersz w same zera. Wpływ takiego "zerowania" wiersza polega na tym, że na jego kolejnego sąsiada (następny wiersz) w całości narzucona zostaje warstwa samych -1 , a wiersz, w którym wykonaliśmy ruchy, bezpiecznie pozostaje wierszem zer. Proces "przepychania" można systematycznie kontynuować wzdłuż tablicy, aż tablica zostanie kompletnie wyzerowana, kończąc algorytm po dotarciu do jej najdalszego końca.

Symulacja OMJ – zestaw III.2

34. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym, w którym $BC = AD$. Niech M i N będą odpowiednio środkami boków AB i CD . Proste AD i BC przecinają prostą MN odpowiednio w punktach P i Q . Udowodnij, że $CQ = DP$.

Rozwiązanie: Niech A', B', C', D' będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A, B, C, D na prostą MN . Ponieważ M i N są środkami odcinków, zachodzą równości odległości:

$$AA' = BB' \quad \text{oraz} \quad CC' = DD'.$$

Oznaczmy przez X, Y rzuty prostokątne odpowiednio punktów C, D na proste BB', AA' . Z powyższych równości wnioskujemy, że $AY = BX$. Ponieważ dodatkowo $BC = AD$, trójkąty prostokątne BXC i AYD są przystające. To pokazuje, że:

$$\angle C'CQ = \angle B'BQ = \angle A'AP = \angle D'DP.$$

Zatem, skoro $CC' = DD'$ oraz kąty przy wierzchołkach C i D (względem rzutów) są równe, trójkąty prostokątne $CC'Q$ oraz $DD'P$ są przystające. Z tego bezpośrednio wynika, że $CQ = DP$.

35. Wiadomo, że n jest dodatnią liczbą całkowitą, $n \leq 144$. Dozwolone jest zadanie 10 pytań typu „Czy n jest mniejsze od a ?”. Odpowiedzi udzielane są z opóźnieniem: odpowiedź na i -te pytanie podawana jest dopiero po zadaniu $(i + 1)$ -go pytania (dla $i = 1, 2, \dots, 9$). Odpowiedź na 10 pytanie jest udzielana natychmiast po jego zadaniu. Znajdź strategię pozwalającą na jednoznaczne zidentyfikowanie n .

Rozwiązanie: Niech liczby Fibonacciego będą oznaczone jako $F_0 = 1, F_1 = 2, F_2 = 3$ itd. Wtedy $F_{10} = 144$. Udowodnimy przez indukcję względem k , że przy użyciu k pytań (zgodnie z warunkami zadania) możliwe jest wyznaczenie dowolnej dodatniej liczby całkowitej $n \leq F_k$. Dla $k = 0$ jest to trywialne, ponieważ bez zadawania pytań wiemy, że $n = 1$. Dla $k = 1$ po prostu pytamy, czy n jest mniejsze od 2. Dla $k = 2$ pytamy, czy n jest mniejsze od 3 oraz czy n jest mniejsze od 2; z tych dwóch odpowiedzi możemy precyzyjnie ustalić n . W przypadku ogólnym, nasze pierwsze dwa pytania zawsze będą brzmiały: „Czy n jest mniejsze od $F_{k-1} + 1$? ” oraz „Czy n jest mniejsze od $F_{k-2} + 1$? ”. Dopiero wtedy otrzymujemy odpowiedź na pierwsze pytanie. Dopóki dostajemy twierdzące odpowiedzi na $(i - 1)$ -sze pytanie, nasze $(i + 1)$ -sze pytanie brzmi: „Czy n jest mniejsze od $F_{k-(i+1)} + 1$? ”. Jeśli w którymś momencie (powiedzmy, po zadaniu j -tego pytania) otrzymamy odpowiedź przeczącą na $(j - 1)$ -sze pytanie, dowiadujemy się, że $F_{k-(j-1)} + 1 \leq n < F_{k-(j-2)}$. Zatem n jest jedną z $F_{k-(j-2)} - F_{k-(j-1)} = F_{k-j}$ kolejnych liczb całkowitych, i z założenia indukcyjnego możemy odgadnąć n dysponując pozostałymi $k - j$ pytaniami. W przeciwnym razie otrzymamy twierdzące odpowiedzi na wszystkie pytania, z których ostatnie brzmi „Czy n jest mniejsze od $F_{k-k} + 1 = 2$? ”; w takim wypadku po prostu $n = 1$.