

XXXV ZIMOWA SZKOŁA MATEMATYKI „NIERÓWNOŚCI”
TEST WIADOMOŚCI

.....
Imię i nazwisko

szkoła

Zad. 1. Uzupełnij zdania, aby były matematycznie i językowo poprawne. Jedna luka ma zawierać jedno słowo.

a) Nierówność to twierdzenie w geometrii mówiące, że suma dwóch boków jest od boku. W szczególności bok musi być niż Odcinki o długościach 3 cm, 4 cm i cm nie stworzą, a odcinki o długościach 5 cm, 6 cm i cm – tak.

b) Nierówność to $L^2 \geq 4\pi P$, gdzie L oznacza, a P – pole pewnej figury płaskiej. ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy ta figura jest Wynika z niej, że spośród wszystkich figur o jednakowym największe ma lub równoważnie, że spośród wszystkich figur o jednakowym ma koło.

c) Zasada to metoda dowodzenia, że nierówność jest dla wszystkich liczb od n_0 . Składa się z kroków. Pierwszy nazywa się indukcji. Sprawdzamy w nim, czy nierówność jest dla n_0 . Drugi polega na, że nierówność zachodzi dla pewnej liczby większej od W kolejnym kroku, stosując indukcyjne, sprawdzamy, że nierówność jest prawdziwa dla liczby W ostatnim kroku z twierdzenia o, wnioskujemy, że nierówność jest dla liczb, które są od

Zad. 2. Wszystkie wiewiórki mają ten sam kolor. Gdzie tkwi błąd w indukcyjnym dowodzie tego twierdzenia? Dowód przez indukcję ze względu na liczbę wiewiórek w rozważanym zbiorze. 1) Jeśli mamy jedną wiewiórkę w zbiorze, to ma ten sam kolor, co ona sama. 2) Załóżmy, że w k -elementowym zbiorze wiewiórki są ponumerowane od 1 do k i mają ten sam kolor. Dokładamy do tego zbioru nową $k+1$ -szą wiewiórkę. 3) Na mocy założenia indukcyjnego wiewiórki od 1 do k mają ten sam kolor, podobnie wiewiórki o numerach od 2 do $k+1$. Ponieważ wiewiórki o numerach od 2 do k nie zmieniają koloru, to wiewiórki o numerach od 1 do $k+1$ muszą mieć ten sam kolor. Udowodniliśmy zatem, że jeśli dla k wiewiórek twierdzenie jest prawdziwe, to dla $k+1$ też. 4) Stosujemy twierdzenie o indukcji (bo sprawdziliśmy jego założenia). Wynika z niego, że dla dowolnej naturalnej liczby wiewiórek w zbiorze mają one ten sam kolor.

.....
.....

Zad. 3. O pewnej nierówności W dla liczb naturalnych wiemy, że $W(0)$ zachodzi, z $W(n)$ wynika $W(n+2)$ oraz z $W(n)$ wynika $W(n-3)$. Czy ta nierówność jest spełniona przez wszystkie liczby naturalne?

Zad. 4. Czy dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y zachodzą podane nierówności? Wpisz Tak lub Nie.

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| a) $8x^3+y^3+27>18xy$ | b) $8x^3+y^3+27<15xy$ |
| c) $8x^3+y^3+27>12xy$ | d) $8x^3+y^3+27>6xy$ |

Zad. 5. Rozważmy liczby rzeczywiste dodatnie x, y, z . Jak można sensownie oszacować wartość:

- a) $(1+x)(1+y)$ z góry, jeśli $x+y = 12$?
- b) $(x+y)(y+z)(x+z)$ z dołu?

Zad. 6. Uporządkuj rosnąco liczby: $\binom{100}{7}, \binom{100}{27}, \binom{100}{47}, \binom{100}{57}, \binom{100}{77}, \binom{100}{97}$

..... $\leq$ $\leq$ $\leq$ $\leq$ $\leq$

Zad. 7. Uzasadnij, że dla n i k naturalnych, gdzie $n \geq k$, zachodzi $\binom{n}{k} \leq 2^n$.

Zad. 8. Pokaż, że dla dowolnych $a, b > 0$ zachodzi $1/a + 1/b \geq 4/(a+b)$.

Zad. 9. Udowodnij, że jeśli a, b, c są długościami boków trójkąta, to zachodzi $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$.

Zad. 10. Pokaż, że dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi $a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b) \geq 3/2$.

Zad. 11. Pokaż, że dla dowolnych $a, b, c, d > 0$ zachodzi $a/(3a+b) + b/(3b+c) + c/(3c+d) + d/(3d+a) \geq 1/3$.

Zad. 12. Udowodnij za pomocą indukcji matematycznej, że kwadrat sumy odwrotności pierwiastków z kolejnych liczb naturalnych od 1 do n nie przekracza n .