

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

1. Alicja stanęła na głowie i wówczas zobaczyła w lustrze godzinę 21:51 wyświetlaną na zegarze elektronicznym. Jaką godzinę zobaczyła w lustrze po 6 godzinach i trzydziestu dziewięciu minutach, gdy ponownie stanęła na głowie?

Odp.

R1. 15:12

Na początku zegar wskazywał godzinę 15:12. Po 6 godz i 39 min była 21:51, więc w lustrze Alicja zobaczyła 15:12.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

2. Jeśli dzień przed dniem trzy dni po dniu poprzedzającym jutro to czwartek, to jaki dzień jest dzisiaj?

Odp.

R2. wtorek

Dzień poprzedzający jutro to dzisiaj. Dzień przed dniem trzy dni po dzisiaj to pojutrze. Skoro pojutrze jest czwartek, to jutro jest środa, a dziś jest wtorek.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

3. Pewnego dnia na Poczcie Głównej nadano 999 paczek . Urzędniczki ponumerowały je w kolejności nadawania liczbami od 1 do 999, a następnie na każdej z paczek napisały numer kontrolny, będącą sumą cyfr numeru danej paczki. Ile wynosi suma numerów kontrolnych?

Odp.

R3. 13500

Każda z cyfr od 0 do 9 występuje tyle samo razy: 100 razy na miejscu jedności, 100 razy na miejscu dziesiątek i 100 razy na miejscu setek. Suma numerów kontrolnych wynosi $300 \cdot (0+1+2+\dots+9) = 300 \cdot 45 = 13500$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

4. Babcia Pelagia hoduje koty. Ma ich tyle, że gdy dodała liczby kocich ogonów, uszu i łap, otrzymała ponad 100. Gdy zaś zsumowała tylko liczby ogonów i łap, otrzymała mniej niż 80. Ile kotów ma babcia Pelagia?

Odp.

R4. 15

Suma łap, uszu i ogona jednego kota wynosi 7. Zatem kotów jest więcej niż $100:7=14 \frac{2}{7}$, czyli co najmniej 15. Suma łap i ogona jednego kota wynosi 5. Zatem liczba kotów jest mniejsza niż $80:5=16$, więc co najwyżej 15. Pelagia ma 15 kotów.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

5. Walutą Nibylandii są nibydolary, które występują w banknotach następujących nominałach: 3, 13, 51 oraz 113. Piotruś Pan wypłacił z nibybankomatu kwotę 228 nibydolarów. Okazało się, że każdy nominał wystąpił w niej nie więcej niż 3 razy. Jaką najmniejszą liczbę banknotów mógł otrzymać?

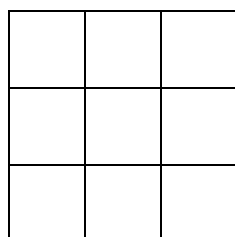
Odp.

R5. 4

Piotruś otrzymał banknoty 113, 51, 51, 13. Gdyby otrzymał mniej niż 4 banknoty, musiałby otrzymać co najmniej dwa razy banknot 113. To jest niemożliwe, ponieważ pozostałe nominały musiałyby się sumować do kwoty 22.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

6. Ile prostokątów jest na tym rysunku?



Odp.

R6. 36

Wybieramy 2 boki pionowe i 2 poziome $(4 \text{ po } 2) \times (4 \text{ po } 2) = 36$

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

7. W autobusie relacji Wrocław – Jelenia Góra $\frac{2}{3}$ pasażerów stanowią kobiety i dzieci, a $\frac{1}{8}$ pozostałych pasażerów jest łysa, w tym kierowca, ale nie jest on najwyższy wśród łysych mężczyzn. Autobus ma 52 miejsca siedzące dla pasażerów, nikt nie może jechać na stojąco i każdy pasażer zajmuje tylko jedno miejsce. Ile miejsc siedzących jest jeszcze wolnych?

Odp.

R7. 5

$\frac{1}{3}$ pasażerów stanowią mężczyźni, a $\frac{1}{8}$ z nich jest łysa. To znaczy, że $\frac{1}{24}$ pasażerów stanowią łysi mężczyźni, których jest co najmniej dwóch. Zatem liczba pasażerów to wielokrotność 24, która jest większa od 24 i mniejsza od 54, czyli jest równa 48. To znaczy, że pasażerowie zajmują 47 miejsc (kierowca zajmuje miejsce 48). Wolnych miejsc jest $52 - 47 = 5$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

8. Ile trójek jest w rozkładzie liczby $2000 \cdot 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot \dots \cdot 2024 \cdot 2025$ na czynniki pierwsze?

Odp.

R8. 14

Wykreślmy czynniki niepodzielne przez 3. Zostaje $2001 \cdot 2004 \cdot 2007 \cdot 2010 \cdot 2013 \cdot 2016 \cdot 2019 \cdot 2022 \cdot 2025$.

Sześć z tych czynników nie dzieli się przez 9. Pozostałe trzy to $2007 = 9 \cdot 223$, $2016 = 9 \cdot 224$ i $2025 = 27 \cdot 25$. Mamy $6+2+2+4 = 14$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

9. Państwo Kowalscy odnawiają mieszkanie. Mąż na pomalowanie ścian potrzebuje 14 dni, a wspólnie z żoną pomalowałoby je w ciągu 10 dni. Ile dni na pomalowanie ścian potrzebowałaby sama żona?

Odp.

R9. 35

Mąż maluje codziennie $\frac{1}{14}$ część wszystkich ścian, zaś $\frac{1}{10}$ gdy maluje razem z żoną. Żona samodzielnie malowałaby $\frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{1}{35}$ część wszystkich ścian. Sama pomalowałaby ściany w 35 dni.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

10. Używając trzech liczb naturalnych a, b, c (każdej raz), utwórz wszystkie możliwe liczby mieszane $a \frac{b}{c}$ tak, aby ich suma wynosiła 20. Jakie będą te liczby mieszane?

Odp.

R10. $1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{3}{2}, 3\frac{1}{2}, 3\frac{2}{1}$.

Za pomocą trzech różnych liczb naturalnych a, b, c można utworzyć sześć różnych liczb mieszanych (permutujemy część całkowitą, licznik, mianownik). Jeśli suma wszystkich sześciu liczb mieszanych ma wynosić 20, to znaczy, że suma trzech wybranych liczb naturalnych musi być mniejsza niż 10, bo każda z tych liczb zostanie użyta dwa razy jako część całkowita. Ponadto wśród części ułamkowej liczb mieszanych wystąpią trzy ułamki niewłaściwe (większe niż 1), więc ostatecznie wybrana trójka liczb naturalnych ma sumę mniejszą niż 7. Taka trójka jest tylko jedna: 1, 2, 3, a szukane liczby mieszane to $1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{3}{2}, 3\frac{1}{2}, 3\frac{2}{1}$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

11. Piraci pakują swoje skarby. Do kufra wkładają maksymalnie trzy szkatułki. Liczba klejnotów w szkatułce nie przekracza 50 i ma wszystkie cyfry takie same. Jaka jest najmniejsza liczba klejnotów, której na pewno nie będzie w żadnym kufrze?

Odp.

R11. 65

Możliwe liczby klejnotów w szkatułkach to: 1–9, 11, 22, 33 i 44. Aby utworzyć kufry z zawartością:

- od 1 do 27, bierzemy jedną, dwie lub trzy szkatułki po 1–9 klejnotów,
- od 22 do 40, bierzemy szkatułkę 22 i maksymalnie dwie szkatułki 1–9,
- od 33 do 51, bierzemy szkatułkę 33 i maksymalnie dwie szkatułki 1–9,
- od 44 do 62, bierzemy szkatułkę 44 i maksymalnie dwie szkatułki 1–9,
- 63 i 64 tworzymy jako $33+22+8$ i $33+22+9$.

Założmy, że $65=a+b+c$, gdzie $a \leq b \leq c$ i a, b, c mają te same cyfry. Wówczas $c \geq 65/3$, czyli $c \geq 22$.

a) Jeżeli $c=22$, to $a+b=43$ i wówczas $b \in \{22, 33\}$, co daje $a \in \{21, 10\}$ – sprzeczność.

b) Jeżeli $c=33$, to $a+b=32$ i wówczas $b=22$, co daje $a=10$ – sprzeczność.

c) Jeżeli $c=44$, to $a+b=21$ i wówczas $b=11$, co daje $a=10$ – sprzeczność.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

12. Do dyspozycji masz trzy świece. Czas spalania pierwszej z nich wynosi 25 minut, drugiej – 70 minut, a trzeciej – 85 minut. Jaki najkrótszy odcinek czasu można odmierzyć za pomocą tych świec?

Odp.

Odmierzanie może zacząć się w dowolnym momencie, świece można dowolnie zapalać i gasić. Świece mogą spalać się nierównomiernie, więc patrząc na świece nie wiemy, ile czasu palenia im pozostało. Knot do zapalania i gaszenia wystaje tylko od góry. Łamanie świec jest niedozwolone.

R12. 10 min

Zapalamy jednocześnie świece 70 i 85. Po wypaleniu się pierwszej zapalamy 25. Kiedy wypali się 85 wiemy, że pozostało $70+25-85 = 10$ minut do wypalenia się pierwszej świecy. Wtedy rozpoczynamy pomiar czasu. Dowolna inna ilość czasu, którą można odmierzyć, powstaje przez dodanie lub odjęcie liczb 25, 70 i 85. Każda liczba utworzona w ten sposób jest podzielna przez 5, ale liczby 5 nie da się utworzyć, zatem 10 minut to najkrótszy możliwy odcinek czasu.

JUN

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

13. W układzie współrzędnych dany jest kwadrat o wierzchołkach $A = (4, 4)$, $B = (4, -4)$, $C = (-4, -4)$, $D = (-4, 4)$.

W wierzchołku A siedzi mrówka, a w wierzchołku C – biedronka. W pewnym momencie obie rozpoczynają wędrówkę po brzegu kwadratu w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu wskazówek zegara. Mrówka idzie z prędkością 13 jednostek na minutę, a biedronka – 9 jednostek na minutę. Po jakim czasie nastąpi ich pierwsze spotkanie? W jakim punkcie ono nastąpi?

Odp.

R13. (-4, 0)

Odległość między mrówką a biedronką jest równa połowie obwodu kwadratu, czyli 16. W czasie minuty mrówka przybliży się do biedronki o $13-9=4$ jednostki. Do pierwszego spotkania dojdzie po $16:4=4$ minutach. Biedronka przejdzie w ciągu 4 minut $4 \cdot 9=36$ jednostek, czyli zrobi jedno pełne okrążenie i przejdzie jeszcze 4 jednostki. Pierwsze spotkanie nastąpi więc w punkcie $(-4, 0)$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

14. Pewna płaszczyzna nie przechodzi przez żaden wierzchołek czworoboku. Ile może być równa liczba krawędzi tego czworoboku, które przecina ta płaszczyzna?

Odp.

R14. 0, 3 lub 4

Jeśli po jednej stronie płaszczyzny leży jeden wierzchołek czworoboku, a po drugiej trzy, to przecina ona trzy krawędzie. Jeśli po każdej stronie płaszczyzny znajdują się dwa wierzchołki czworoboku, to przecina ona 4 krawędzie. Jeśli wszystkie cztery wierzchołki czworoboku leżą po tej samej stronie płaszczyzny to nie przecina ona żadnej krawędzi.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

15. Woda zamieniając się w lód zwiększa swoją objętość o $\frac{1}{11}$. O jaką część zmniejszy się objętość lodu, który zamienia się w wodę?

Odp.

R15. O $\frac{1}{12}$.

Z jednej części wody otrzymujemy $\frac{12}{11}$ części lodu, a z jednej części lodu otrzymujemy $1:\frac{12}{11}=\frac{11}{12}$ części wody. Część lodu, który zamienia się w wodę zmniejsza swoją objętość o $\frac{1}{12}$ tej części.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

16. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia taką, że 3% tej liczby oraz 7% tej liczby są liczbami całkowitymi i mają w rzędzie jedności tę samą cyfrę?

Odp.

R16. 500

Niech x oznacza szukaną liczbę. Ponieważ 3% liczby x to $0,03x$, a wynik ma być całkowity dodatni, więc x musi być podzielne przez 100. Zatem $x=100k$, gdzie $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Wówczas 3% liczby x to $0,03 \cdot 100k=3k$, a 7% liczby x to $0,07 \cdot 100k=7k$. Dla $k=5$ liczby $3k$ i $7k$ mają tę samą cyfrę jedności. Liczba x jest zatem równa $100 \cdot 5=500$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

17. Z koła wycięto koło współśrodkowe o dwa razy mniejszym promieniu. Pozostałą część podzielono na cztery części za pomocą dwóch prostopadłych średnic. Jaki procent pola wyjściowego koła stanowi pole jednej z tych czterech części?

Odp.

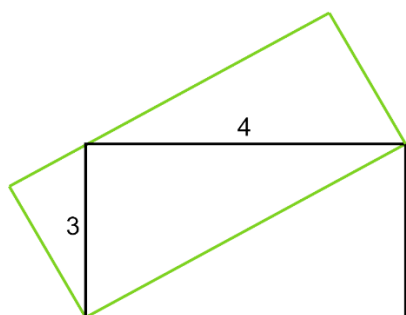
R17. 18,75

Niech r będzie promieniem koła. Musimy obliczyć $(\pi r^2 - \pi (r/2)^2) : 4 / \pi r^2 = (1 - 1/4) / 4 = 3/16 = 18,75\%$.

.....

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

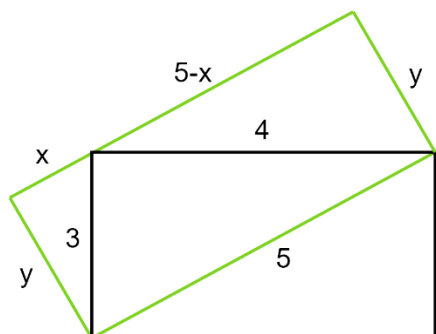
18. Na zawodach origami model wykonuje się z prostokątnej kartki papieru utworzonej w następujący sposób. Zaczynamy od prostokąta P_1 o wymiarach 3×4 i tworzymy prostokąt P_2 , którego jeden bok jest przekątną P_1 , a bok do niego równoległy przechodzi przez jeden z wierzchołków P_1 . Jakie pole ma prostokąt P_2 ?



Odp.

R18. 12

P_2 ma boki długości y i 5. Niech x i $5-x$ będą długościami odcinków na jakie bok P_2 jest podzielony przez wierzchołek P_1 . Wówczas z twierdzenia Pitagorasa mamy układ równań $x^2 + y^2 = 9$ i $(5-x)^2 + y^2 = 16$. Odejmując równania stronami, dostajemy $25 - 10x = 7$, czyli $x = 9/5$, a stąd $y = 12/5$. Pole P_2 wynosi zatem $5 \cdot 12/5 = 12$.



WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

22. Państwo Kowalscy, podróżując samolotem linii Biełka, mieli razem 94 kg bagażu. Pan Kowalski zapłacił 15 zł za nadbagaż, a pani Kowalska - 20 zł. Gdyby pan Kowalski podróżował sam z bagażem obojga, to zapłaciłby za nadbagaż 135 zł. Ile kilogramów bagażu może bezpłatnie wziąć ze sobą pasażer na pokład samolotu linii Biełka?

Odp.....

R22. 40

Niech x oznacza liczbę bagażu jaką każdy pasażer może wziąć bezpłatnie do samolotu. Państwo Kowalscy zabrali do samolotu łącznie 94 kilogramy bagażu, w tym $94-2x$ za który zapłacili łącznie 35 złotych. Wynika stąd, że kilogram płatnego bagażu kosztuje $35:(94-2x)$. Analiza przebiega podobnie, gdyby do samolotu wsiadł sam pan Kowalski. Zapłaciłby wówczas za $94-2x$ kilogramów bagażu 135 zł, więc za 1 kg opłata wynosiłaby $135:(94-2x)$. Porównując opłaty otrzymujemy równanie $35:(94-2x) = 135:(94-2x)$, skąd otrzymujemy $x=40$ kg. Każdy pasażer może wziąć bezpłatnie ze sobą bagaż o wadze 40 kg.

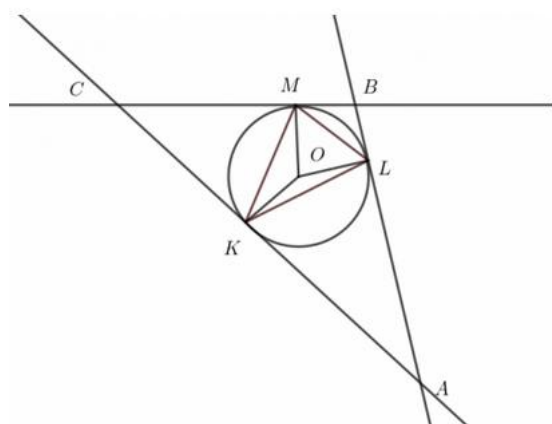
WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

23. Okrąg został podzielony w stosunku 5:9:10. W punktach podziału poprowadzono styczne. Oblicz miary kątów trójkąta, którego wierzchołkami są punkty przecięcia tych stycznych.

Odp.....

R23. 30, 45, 105

Niech K, M, N będą punktami podziału okręgu i jednocześnie punktami styczności odpowiednich stycznych z okręgiem. Niech ABC będą wierzchołkami otrzymanego trójkąta i niech O będzie środkiem okręgu. Proporcja podziału okręgu jest taka sama jak proporcja podziału między kątami środkowymi, czyli $|\angle KOL| : |\angle LOM| : |\angle MOK| = 9:5:10$. Stąd $|\angle KOL| = 135^\circ$, $|\angle LOM| = 75^\circ$, $|\angle MOK| = 150^\circ$. W czworokącie $KOLA$ mamy $|\angle OKA| = |\angle OLA| = 90^\circ$. Zatem $|\angle KAL| = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - |\angle KOL| = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Podobnie obliczamy miary kątów $|\angle LBM| = 105^\circ$ i $|\angle MCK| = 30^\circ$. Ostatecznie miary kątów trójkąta wynoszą $30^\circ, 45^\circ, 105^\circ$.



WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

24. W prostopadłościanie wymiarach a, b, c zachodzi $1/a = 1/b + 1/c$. Wymiar a zmniejszono o 10%. O ile procent zmniejszyło się pole powierzchni tej bryły?

Odp.

R24. 5%

Po przekształceniach wyrażenia z zadania otrzymujemy $a=bc/(b+c)$. Pole powierzchni zmniejszonego prostopadłościanu wynosi $2 \cdot 0,9ab + 2 \cdot 0,9ac + 2bc = 1,8a(b+c) + 2bc = 1,8 \cdot bc/(b+c) \cdot (b+c) + 2bc = 1,8bc + 2bc = 3,8bc$. Pole powierzchni początkowego prostopadłościanu jest równe $2ab + 2ac + 2bc = 2a(b+c) + 2bc = 2 \cdot bc/(b+c) \cdot (b+c) + 2bc = 4bc$. Pole powierzchni bryły zmniejszyło się o $(4bc - 3,8bc)/4bc$ procent, czyli o 5%.

LO

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

25. W pewnym nieskracalnym ułamku właściwym różnica między mianownikiem i licznikiem po podniesieniu tego ułamka do kwadratu jest 10 razy większa niż przed podniesieniem. Znajdź wszystkie ułamki mające taką własność.

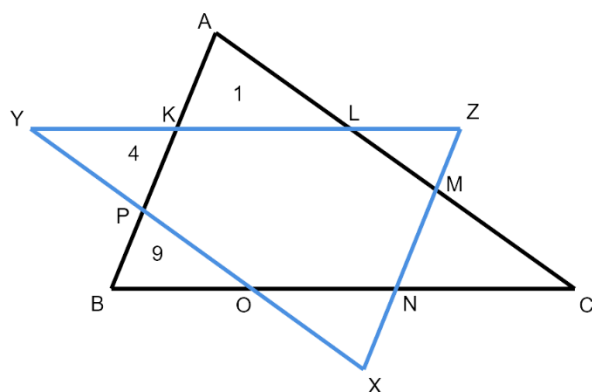
Odp.

R25. $1/9$ i $3/7$

Oznaczmy szukany ułamek jako k/n . Zachodzi związek $n^2 - k^2 = 10(n - k)$, czyli $(n - k)(n + k) = 10(n - k)$. Ponieważ k/n jest nieskracalnym ułamkiem właściwym, więc $k \neq n$, czyli $n + k = 10$. Ułamkami właściwymi spełniającymi ten warunek są: $1/9, 2/8, 3/7$ i $4/6$, ale tylko $1/9$ i $3/7$ są nieskracalne.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

26. Godłem Nibylandii jest nieforemna gwiazda 6-ramienna. Składa się ona z dwóch przystających trójkątów ABC i XYZ ustawionych tak, że pary boków AB i XZ, BC i YZ oraz XZ i AB są równoległe. Oznaczmy przez K, L, M, N, O, P punkty przecięcia boków obu trójkątów (patrz rysunek). Wiedząc, że pola trójkątów AKL, KPY i BPO wynoszą odpowiednio 1, 4 i 9, znajdź pole tej gwiazdy.



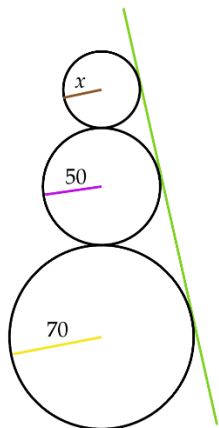
Odp.

R26. 50

Ponieważ BKZN jest równoległobokiem, mamy $BK=NZ$ i $AP=MX$. Ponadto $AB=XZ$, bo trójkąty ABC i XYZ są przystające. Z tych równości dostajemy $AK = AB-BK = XZ-NZ = NX$, zatem podobne trójkąty AKL oraz NXO są przystające. Analogicznie przystające są trójkąty KPY i MCN , a także BPO i ZLM . Oznaczmy pole trójkąta ABC przez k^2 . Wówczas trójkąty ABC i AKL są podobne w skali k , zatem $AK/AB=1/k$. Analogicznie $BP/AB=3/k$, $KP/AB=4/k$. Sumując wszystkie trzy równości, otrzymujemy $6k = 1/k+2/k+3/k = AK/AB+BP/AB+KP/AB = AB/AB=1$. Daje to $k=6$. Zatem pole gwiazdy wynosi $P_{ABC}+1+4+9 = 36+1+4+9 = 50$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

27. Kasia zbudowała bałwana z kul o promieniach 70, 50 i x centymetrów (jak na rysunku). Jaką wartość powinno mieć x , aby istniała prosta styczna do wszystkich trzech kul?



Odp.

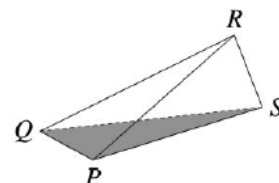
R27. $250/7 \approx 35,71$

Narysujmy prostą przechodzącą przez środki kół i oznaczmy jej punkt przecięcia ze styczną przez P . Połączmy również środki okręgów ze stycznymi – powstają trzy kąty proste. Odległość środka ostatniego okręgu od punktu P oznaczmy jako $x+y$. Wówczas z twierdzenia Talesa zastosowanego dla trzech trójkątów prostokątnych mających wspólny punkt P otrzymujemy układ równań $70/50 = (170+2x+y)/(50+2x+y)$ oraz $50/x = (50+2x+y)/(x+y)$. Wyznaczając x , otrzymujemy $250/7 \approx 35,71$.

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

28. Soczki dla niemowląt są sprzedawane w kartonikach w kształcie czworościanu o przystających ścianach (patrz rysunek). $|QP| = |RS| = 4$ cm
a $|PR| = |PS| = |QR| = |QS| = 10$ cm. Jaka jest objętość kartonika (w cm^3)?

Odp.



R. 28. $(16\sqrt{23})/3$

WINGS FOR MATHS 2025 kapitan:

29. Na skończonym ciągu liczb budujemy równoboczny trójkąt liczbowy, tak że ciąg ten umieszczamy w jego podstawie, a każda liczba poza stojącymi w podstawie jest sumą liczb stojących bezpośrednio pod nią. Jaka będzie suma liczb w takim trójkącie, jeśli podstawa będzie się składać ze stu jedynek?

Odp.

R29. $2^{101} - 102$

Zauważmy, że $1+2+4+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$ (można to zobaczyć dzięki zapisaniu lewej strony dwójkowo i dodaniu do niej dwójkowo 1, można też pomnożyć ją przez $(2-1)$, wykonując mnożenie „każdy z każdym”) Z konstrukcji trójkąta wynika, że na kolejnych „piętrach” stoi o jeden mniej niż poniżej liczb dwa razy większych niż poniżej, wygodnie można je więc posumować wzdłuż linii równoległych do nie poziomego boku trójkąta: $1+(1+2)+(1+2+4)+(1+2+4+8)+\dots+(1+2+4+\dots+2^{99})$, co z lematu daje $(2^1 - 1)+(2^2 - 1)+(2^3 - 1)+\dots+(2^{100} - 1) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} - 100$. Stosując ponownie wzór z lematu, mamy dalej: $2^{101} - 1 - 100 = 2^{101} - 102$.
