

ZAD. 1. Szczyt Hejnalicy – wyższej wieży Kościoła Mariackiego – zdobi złocona korona. Na niej wyryto dwa tajemnicze napisy: MDCLXVI (rok wykonania) i MCMXIII (rok odnowienia). Po ilu latach od założenia koronę odnowiono?

Odp.

ROZW. 1. 247

MDCLXVI=1666, MCMXIII=1913, 1913–1666=247.

ZAD. 2. Ile krawędzi ma graniastosłup o 102 ścianach?

Odp.

ROZW. 2. 300

Liczba krawędzi bocznych jest równa liczbie ścian bocznych. Liczba ścian bocznych wynosi 100. Zatem wszystkich krawędzi jest $3 \cdot 100 = 300$.

ZAD. 3. Agata zapakowała prezent na Dzień Matki do pudełka w kształcie sześcianu. Jaką długość ma krawędź tego pudełka, jeśli wyraża się ona naturalną liczbą centymetrów, a suma długości wszystkich krawędzi, pole powierzchni oraz objętość sześcianu są trzycyfrowymi liczbami naturalnymi odpowiednich jednostek?

Odp.

ROZW. 3. 9

Oznaczmy przez x długość krawędzi sześcianu. Wówczas liczby $12x$, $6x^2$ oraz x^3 są trzycyfrowymi liczbami naturalnymi. Jedyną liczbą jednocyfrową, której iloczyn z 12 jest liczbą trzycyfrową, jest 9. Stąd wynika, że długość krawędzi sześcianu wynosi 9.

ZAD. 4. Lena chce kupić koleżance na imieniny spinkę do włosów. Spinka może mieć co najwyżej jedną oś symetrii, żeby być dostatecznie piękną. Które spośród podanych kształtów spinek może wybrać Lena?

A. kwadrat B. romb C. trapez prostokątny D. równoległobok E. koło

Odp.

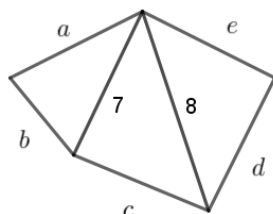
ROZW. 4. C, D

ZAD. 5. W pięciokącie jedna z przekątnych ma 7 cm, a druga – wychodząca z tego samego wierzchołka – ma 8 cm. Przekątne te podzieliły pięciokąt na trzy trójkąty, każdy o obwodzie 20 cm. Ile wynosi obwód pięciokąta?

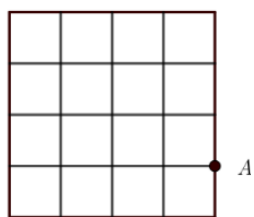
Odp.

ROZW. 5. 30

Z rysunku wynika, że $a+b+7 = 20$, $7+8+c = 20$ oraz $d+e = 20$, skąd $a+b = 13$, $c=5$, $d+e = 12$. Obwód pięciokąta wynosi $a+b+c+d+e = 13+5+12 = 30$.



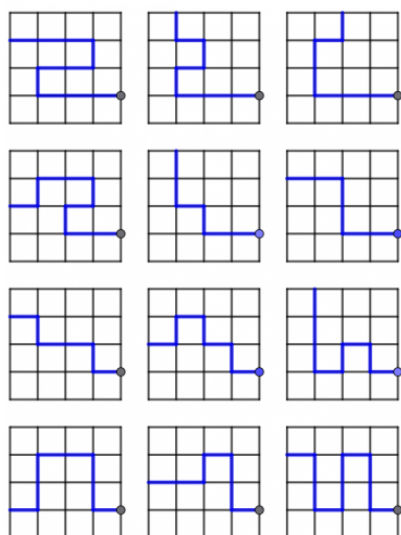
ZAD. 6. Kwadrat złożony z 16 małych kwadracików podziel na dwie spójne części o równych polach. Ile istnieje sposobów podziału, jeśli linia podziału musi rozpocząć się w punkcie A i przebiegać wzdłuż linii siatki?



Odp.

ROZW. 6. 12

Istnieje 12 sposobów podziału kwadratu na dwie spójne części o równych polach.



ZAD. 7. Znajdź liczbę trzycyfrową, której wszystkie dzielniki większe od 1 są podzielne przez 5, a liczba wszystkich dzielników tej liczby jest parzysta.

Odp.

ROZW. 7. 125

125 ma dzielniki 1, 5, 25, 125.

ZAD. 8. Jola pomnożyła pewną liczbę naturalną przez ułamek dziesiętny i otrzymała 22,05. Po dodaniu tych samych liczb również otrzymała 22,05. Na jakich liczbach Lena wykonywała działanie?

Odp.

ROZW. 8. 21, 1.05

Suma szukanych liczb jest równa 22,05, a jeden ze składników jest liczbą naturalną, więc część ułamkowa drugiej liczby to 0,05. Szukane liczby znajdują się wśród par: (22,05, 0,05), (21,05, 1,05), (20,05, 2,05), (19,05, 3,05), ..., (2, 20,05), (1, 21,05). Po zaokrągleniu ułamka dziesiętnego z dokładnością do jedności i oszacowaniu iloczynu szybko wyeliminujemy większość z tych par. Tylko (21, 1,05) spełnia warunki zadania ($21 \cdot 1,05 = 22,05$).

ZAD. 9. Elf Zenek planuje swoje działania w grudniu 2026 roku (od 1 12 do Wigilii włącznie). Na przygotowywanie prezentów chce przeznaczyć te dni grudnia, w których suma numerów dnia i miesiąca jest liczbą pierwszą. Na przygotowywanie dekoracji chciałby przeznaczyć te dni, w których suma numerów dnia i miesiąca jest kwadratem liczby całkowitej. Jaka jest liczba dni, w które Zenek będzie zajęty jednym lub drugim zadaniem?

Odp.

ROZW. 9. 9

Odpowiedzią jest liczba elementów zbioru $\{13, 14, \dots, 36\}$, które są kwadratami liczb całkowitych lub liczbami pierwszymi. Są to $\{13, 16, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 36\}$. Jest ich 9.

JUN

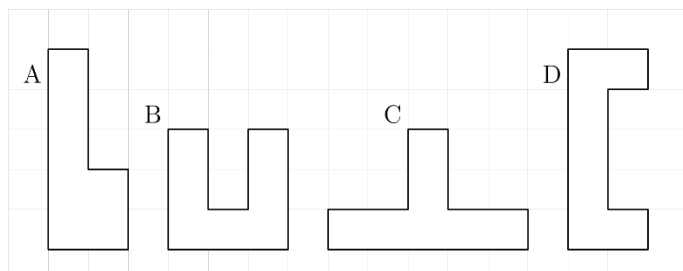
ZAD. 10. Dąb matematyków składa się z pnia oraz 20 pięter. Na najniższym piętrze z pnia wyrasta 20 konarów, a na każdym kolejnym o jeden mniej, więc na najwyższym piętrze z pnia wyrasta jeden konar. Z każdego konaru wyrasta od 3 do 5 gałęzi i od 5 do 9 gałązek, a z każdej gałęzi wyrasta od 2 do 3 gałązek. Na końcu każdej gałązki rośnie żółędź. Jaka jest różnica pomiędzy maksymalną możliwą i minimalną możliwą liczbą żółędzi na tym dębie?

Odp.

ROZW. 10. 2730

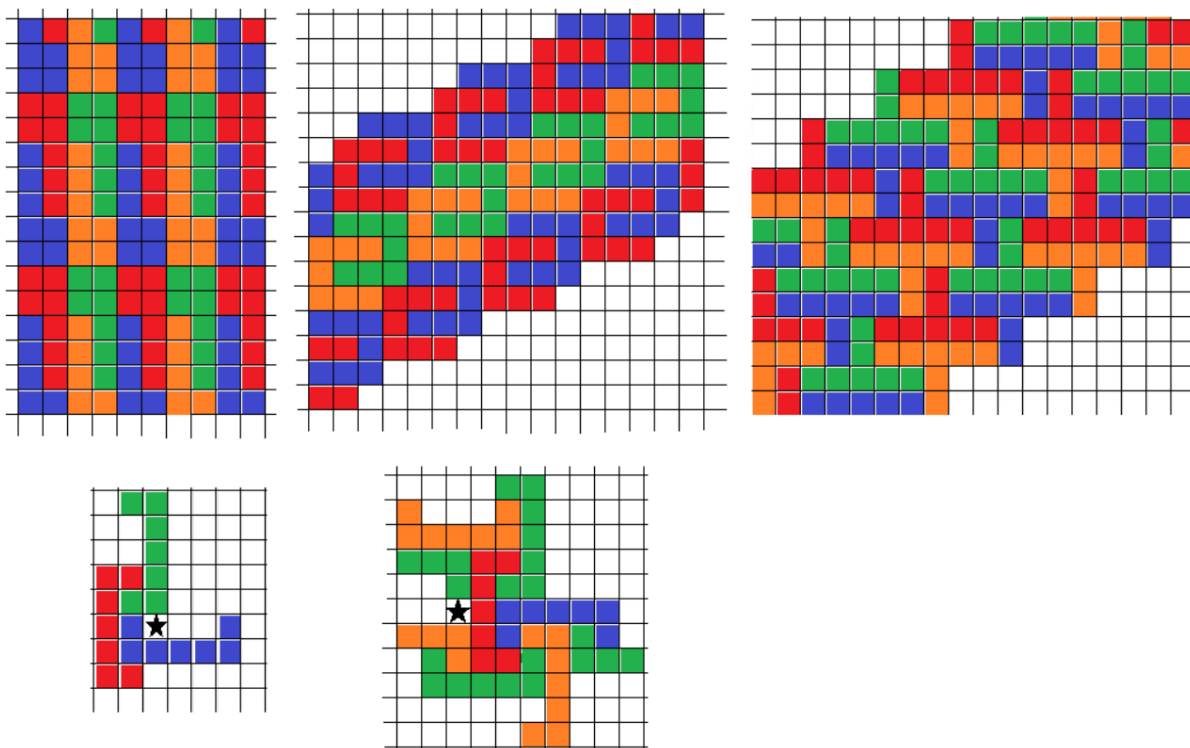
Konarów jest $1+2+\dots+20=210$. Na gałęzi mamy od 2 do 3 gałązek, więc na konarze mamy od $5+3 \cdot 2=11$ gałązek do $9+5 \cdot 3=24$ gałązek. Ostatecznie na całej choince jest od $210 \cdot 11=2310$ do $210 \cdot 24=5040$ gałązek. Różnica to $5040-2310=2730$.

ZAD. 11. Tato Kazika uwielbia mozaiki i chciałby wyłożyć jakimś powtarzalnym wzorem swoją ogromną (nieograniczoną) ścianę w garażu. Kazik chce zrobić tacie prezent na Dzień Ojca i wybrać oryginalne kafelki jednakowego kształtu (A, B, C lub D) do wyłożenia tej ściany. Kafelki można dowolnie obracać, ale ze względu na powierzchnię fakturę nie wolno ich odwracać na drugą stronę. Kafle nie mogą zachodzić jedno na drugie i nie wolno ich docinać. Które z poniższych kształtów mógłby wybrać Kazik?



Odp.

ROZW. 11. A, B, C



ZAD. 12. Pewne igrzyska odbyły się po raz pierwszy w XIX wieku, w roku, który jest liczbą podzielną przez 24 i mającą sumę cyfr równą 24. Odbyły się one również w XX wieku w roku mającym te same własności. Ile lat minęło między tymi zawodami?

Odp.

ROZW. 12. 72

W XIX wieku były następujące lata o sumie cyfr 24: 1896, 1887, 1878, 1869. Wśród nich tylko 1896 może być rokiem pierwszych igrzysk, gdyż żadna z pozostałych nie dzieli się przez 4, a tym bardziej przez 24. W XX wieku były następujące lata o sumie cyfr 24: 1995, 1986, 1977, 1968, 1959. Wśród nich może być tylko 1968, gdyż żadna z pozostałych nie dzieli się przez 4. $1968 - 1896 = 72$ lata.

ZAD. 13. Ile wynosi suma cyfr w zapisie dziesiętnym liczby będącej wartością wyrażenia

$$10^{100} - 10^{99} + 10^{98} - 10^{97} + 10^{96} - 10^{95} + \dots + 10^2 - 10?$$

Odp.

ROZW. 13. 450

$10^{100} - 10^{99} + 10^{98} - 10^{97} + 10^{96} - 10^{95} + \dots + 10^2 - 10 = 10^{99} \cdot (10 - 1) + 10^{97} \cdot (10 - 1) + 10^{95} \cdot (10 - 1) + \dots + 10 \cdot (10 - 1) = 9 \cdot 10^{99} + 9 \cdot 10^{97} + 9 \cdot 10^{95} + \dots + 9 \cdot 10$. Liczba ma zatem 100 cyfr. Występują w niej na zmianę cyfry 9 i 0. W zapisie liczby jest 50 dziewiątek i 50 zer, zatem suma cyfr wynosi $50 \cdot 9 + 50 \cdot 0 = 450$.

ZAD. 14. Nauczycielka zadała uczniom wykonanie w domu modelu wielokąta lub wielościanu. Dzieci podały opisy swoich modeli. Które z nich były rzeczywiście możliwe do wykonania?

- A. Wielokąt, którego wszystkie kąty mają miary w stopniach będące liczbami pierwszymi.
- B. Wielokąt o dokładnie siedmiu osiach symetrii.
- C. Wielościan wypukły o nieparzystej liczbie ścian, nieparzystej liczbie krawędzi oraz nieparzystej liczbie wierzchołków.
- D. Wielościan wypukły, w którym każda ściana jest wielokątem o innej liczbie boków.
- E. Wielościan wypukły o 2025 ścianach, z których każda jest trójkątem.

Odp.

ROZW. 14. A, B

- A. Np. trójkąt o kątach w stopniach 2, 89, 89.
 - B. Np. siedmiokąt foremny.
 - C. Taki wielościan przeczy wzorowi Eulera $W + S = K + 2$, gdzie W , S , K to liczby wierzchołków, ścian i krawędzi.
 - D. Niech n będzie liczbą boków ściany o największej liczbie boków. Wtedy sąsiednie ściany mogą mieć 3, 4, 5, ..., $n-1$ boków, więc któraś liczba musi się powtórzyć.
 - E. Policzmy krawędzie. Każda należy do dokładnie dwóch ścian, a każda ściana ma dokładnie 3 krawędzie. Liczba krawędzi wynosiłaby $3 \cdot 2025 / 2$, a to nie jest całkowite.
-

ZAD. 15. Wypisujemy kolejne liczby naturalne, otrzymując ciąg cyfr 12345678910111213141516... Jaka cyfra znajduje się na 2026. miejscu?

Odp.

ROZW. 15. 7

W danym ciągu cyfr znajduje się 9 liczb jednocyfrowych, 90 liczb dwucyfrowych (zajmują one $9 + 2 \cdot 90 = 180$ miejsc) oraz $(2026 - 189) : 3 = 612$ i $1/3$ liczb trzycyfrowych. Ostatnią wypisaną całą liczbą jest 711 (wypisaliśmy łącznie $9 + 90 + 612 = 711$ kolejnych liczb), a szukaną cyfrą jest pierwsza cyfra kolejnej liczby, czyli 7.

ZAD. 16. Za pomocą trzech różnych cyfr zapisano wszystkie możliwe liczby trzycyfrowe. Suma zapisanych liczb wynosi 5328. Jakie to były cyfry?

Odp.

ROZW. 16. 7, 8, 9

Niech a, b, c to szukane cyfry. Można z nich utworzyć liczby $abc, acb, bca, bac, cab, cba$. Ich sumę możemy zapisać jako $(100a+10b+c)+(100a+10c+b)+(100b+10c+a)+(100b+10a+c)+(100c+10a+b)+(100c+10b+a) = 222a+222b+222c = 222(a+b+c)$, zatem $222(a+b+c)=5328$, skąd $a+b+c=24$. Szukane cyfry to 7, 8 i 9.

LO

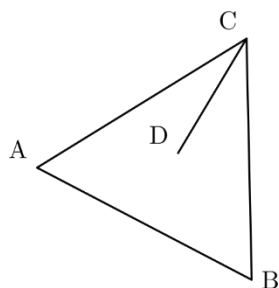
ZAD. 17. Jaka jest suma cyfr zapisanego w systemie dziesiętnym wyniku działania $(10^{2025}+2025)^2$?

Odp.

ROZW. 17. 28

$(10^{2025}+2025)^2 = (10^{2025})^2 + 2 \cdot 10^{2025} \cdot 2025 + 2025^2 = 10^{4050} + 4050 \cdot 10^{2025} + 4100625$, zatem szukana suma cyfr wynosi $1+4+5+4+1+6+2+5 = 28$.

ZAD. 18. Rysunek przedstawia trójkąt równoboczny o boku 3 z zaznaczonym środkiem D. Jakie pole ma największa figura o następującej własności: każda prosta przecinająca tę figurę przecina odcinek CD lub AB?



Odp.

ROZW. 18. $\frac{1}{3} \cdot 3^2 \sqrt{3}/4 = 3\sqrt{3}/4$

Jeśli przez X i Y oznaczymy środki boków AC i CB , to figurą o podanej własności będzie $XDYC$. Jej pole jest jedną trzecią pola trójkąta.

ZAD. 19. Janek zjeżdża z góry slalomem na swoich nowych wrotkach, wielokrotnie przekraczając umowną linię biegnącą przez środek trasy. Okazało się, że po x metrach od początku zjazdu jego przesunięcie względem tej linii wynosi $\sin \sqrt{x}$ metrów. Jeśli wartość jest dodatnia, to Janek jest z jednej strony trasy, a jeśli ujemna – z drugiej. Cała trasa ma długość 1 km. Ile razy Janek przejedzie przez środek trasy? Punkt startowy nie liczy się do wyniku.

Odp.

ROZW. 19. 10

Ponieważ $\sin \alpha = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha = k\pi$ dla liczby całkowitej k , szukamy wszystkich $x \in (0, 1000]$ takich, że $\sqrt{x}/\pi$ jest liczbą całkowitą. Dla takiego x mamy $\sqrt{x}/\pi \leq \sqrt{1000}/\pi \approx 10.07$. Ponieważ $\sqrt{x}/\pi$ jest rosnące i ciągłe, osiąga wartości od 1 do 10.

ZAD. 20. Znajdź wartość $f(3)$, jeśli dla dowolnego $x \neq 0$ spełniona jest równość $f(x) + 2f(1/x) = x^2$.

Odp.

ROZW. 20. -79/27

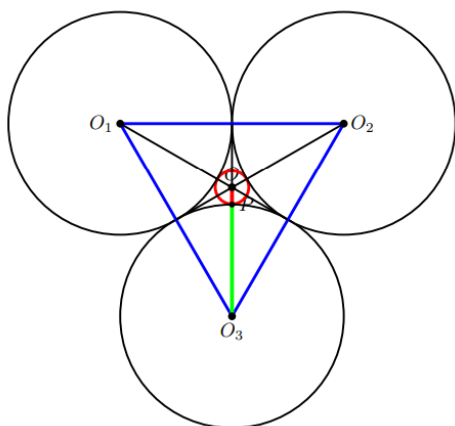
Dla $x=3$ oraz $x=1/3$ otrzymujemy układ równań $f(3) + 2f(1/3) = 3^2$ i $f(1/3) + 2f(3) = (1/3)^2$, którego rozwiązaniem jest $f(3) = -79/27$.

ZAD. 21. Dane są trzy jednakowe okręgi parami styczne zewnętrznie. Pomiędzy nimi znajduje się mniejszy okrąg styczny zewnętrznie do każdego z nich. Jaki jest stosunek promienia małego okręgu do promienia okręgów większych?

Odp.

ROZW. 21. $(2\sqrt{3}-3)/3 = 2/3 \cdot \sqrt{3} - 1$

Oznaczmy promień małego i dużego okręgu przez $r=OP$ oraz $R=PO_3$. Zauważmy, że trójkąt $O_1O_2O_3$ jest równoboczny o boku $2R$ i wysokości $h=R\sqrt{3}$. Wysokości tego trójkąta przecinają się w punkcie O , który dzieli każdą z nich w stosunku 2:1 na odcinki długości $2/3h$ i $1/3h$. Zauważmy, że $2/3h=R+r$. Otrzymujemy równanie $R+r=2/3R\sqrt{3}$, skąd $r=2/3R\sqrt{3}-R=[(2\sqrt{3}-3)/3] \cdot R$. Zatem $r/R=(2\sqrt{3}-3)/3$.

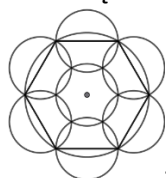


ZAD. 22. Ile co najmniej kół o promieniu 0,5 potrzeba, aby całkowicie zakryć koło o promieniu 1?

Odp.

ROZW. 22. 7

Każde małe koło może przykryć łuk stanowiący co najwyżej $1/6$ brzegu dużego koła (cięciwa łuku jest wtedy średnicą małego koła). Potrzeba siedmiu kół o promieniu 0,5.



ZAD. 23. Oblicz $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$. Wynik podaj w postaci ułamka nieskracalnego.

Odp.

ROZW. 23. 1/16

Skorzystamy z tożsamości $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$. Oznaczmy $x=\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$. Skąd $8\sin 20^\circ \cdot x = 4(2\sin 20^\circ \cdot \cos 20^\circ) \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 4\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = 2(2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ) \cdot \cos 80^\circ = 2\sin 80^\circ \cdot \cos 80^\circ = \sin 160^\circ = \sin(180^\circ - 20^\circ) = \sin 20^\circ$. Zatem $8\sin 20^\circ \cdot x = \sin 20^\circ$, czyli $x=1/8$. Wobec tego $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ = \cos 60^\circ \cdot 1/8 = 1/2 \cdot 1/8 = 1/16$.

ZAD. 24. Kazik przygotowuje prezent dla taty na Dzień Ojca. Wybrał sześcienną pudełko i chce okleić kolorowym papierem każdą jego ścianę. Może użyć papieru czerwonego lub niebieskiego. Ile ma opcji na wybranie kolorowania pudełka? Dwa kolorowania są różne, jeśli nie da się uzyskać jednego kolorowania z drugiego jedynie obracając pudełko..

Odp.

ROZW. 24. 10

Obliczymy ile jest kolorowań z 0, 1, 2 lub 3 niebieskimi ścianami. Jest jedno kolorowanie bez niebieskich ścian. Wszystkie kolorowania z jedną niebieską ścianą są takie same, więc też jest jedno. Jeśli dwie ściany są niebieskie to one albo sąsiadują albo są na przeciwko, są więc dwa takie kolorowania. Jeśli trzy ściany są niebieskie to mamy znowu dwie opcje: niebieskie ściany tworzą narożnik lub tworzą ciąg trzech ścian. Przypadki gdzie jest 4, 5 lub 6 niebieskich ścian są symetryczne, ponieważ jest wówczas 2, 1 lub 0 czerwonych. Wynik to $1+1+2+2+2+1+1 = 10$.

ZAD. 25. Rozwiąż równanie w parach liczb naturalnych $x^3 - 792 = y!$ i podaj w odpowiedzi największą możliwą sumę pary niewiadomych $x+y$ spełniającą to równanie.

Odp.

ROZW. 25. 25 (=8+17)

Pokażmy, że $y < 9$, bo jeśli tak nie jest to $x^3 = y! + 792$ i obie strony są podzielne przez 99. To znaczy, że x dzieli się przez 3, więc $27|x^3$. Jednak $27|y!$ i 27 nie dzieli $y! + 792$, co daje sprzeczność. Pozostaje sprawdzić, czy sześciانami są liczby $792 + y!$ dla $y \leq 8$. Okazuje się, że dla $y=7$ zachodzi $18^3 = 7! + 792$.

ZAD. 26. Jakie pary liczb całkowitych (x, y) spełniają poniższe równanie?

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+23} = 2\sqrt{2} - y$$

Odp.

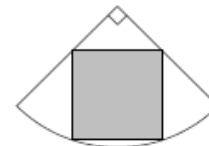
ROZW. 26. (9, 1)

ZAD. 27. Liczby x i y spełniają warunki: $3^x + 3^{y+1} = 5\sqrt{3}$ oraz $3^{x+1} + 3^y = 3\sqrt{3}$. Ile wynosi $3^x + 3^y$?

Odp.

ROZW. 27. $2\sqrt{3}$

ZAD. 28. Kwadrat wpisano w ćwiartkę koła o promieniu 10. Jakie jest pole kwadratu?



Odp.

ROZW. 28. 40

ZAD. 29. Superman może poruszać się w taki sposób, że jego przyspieszenie może wzrosnąć o 2 m/s^2 w ciągu sekundy. W jakim czasie może przebyć dystans 1000 km, jeśli rozpoczyna w bezruchu z początkowym przyspieszeniem 0 m/s^2 ? Odpowiedź zaokrąglaj w górę do pełnych sekund.

Odp.

ROZW. 29. 145

Funkcja przyspieszenia od czasu podanego w sekundach to $a(t) = 2t$. Funkcja prędkości to $v(t) = t^2$. Funkcja drogi od czasu to $s(t) = t^3/3$. Jest to jedyna funkcja, której pochodna to $v(t)$ i $s(0)=0$. Wyliczamy t z równania $s(t) = 1000000 = t^3/3$. Otrzymujemy $100\sqrt[3]{3} \approx 144.22 \approx 145$.

ZAD. 30. Janek narysował okrąg, a na nim równomiernie rozłożone 2024 punkty. Ile maksymalnie odcinków łączących te punkty można narysować tak, aby żadne dwa odcinki nie przecinały się (mogą jednak mieć wspólne końce)?

Odp.

ROZW. 30. 4045

2024 odcinki łączące najbliższe punkty mogą być narysowane zawsze, ponieważ nie mogą się przeciąć z żadnymi innymi. Dorysowując kolejny odcinek zgodnie z regułami zadania, przecinamy jakiś wielokąt niebędący trójkątem jedną z jego przekątnych, tym samym zwiększając liczbę wielokątów o 1. Ostatecznie uzyskamy więc same trójkąty, których zawsze będzie 2022. Ponieważ zaczęliśmy od jednego wielokąta, a skończyliśmy na 2022, dorysowaliśmy 2021 odcinków, czyli wszystkich było $2024+2021 = 4045$.

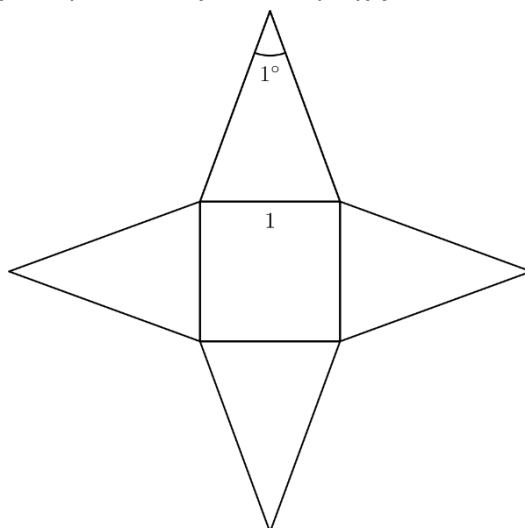
ZAD. 31. Jaka liczba naturalna ma dokładnie 2024 dzielniki i najmniejszą możliwą liczbę cyfr? Wynik podaj w rozkładzie na czynniki pierwsze.

Odp.

ROZW. 31. $2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

Ponieważ $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, szukane n powinno być postaci $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ (potrzebujemy pięciu dzielników pierwszych, a te są najmniejsze) Ponadto $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4 \geq \alpha_5$, bo wtedy n będzie najmniejsze. Wreszcie, liczby $\alpha_i + 1$ muszą być pierwsze dla $i = 1, \dots, 5$, bo jeżeli $\alpha_i + 1 = a \cdot b$, to zastępując w liczbie n czynnik p^{α_i} przez $p^{a-1} \cdot q^{b-1}$ dla $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$ uzyskamy mniejszą liczbę. Szukane n będzie równe $2^{22} \cdot 3^{10} \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 95352740904960$, a ta liczba ma 14 cyfr.

ZAD. 32. Jaką wysokość ma model ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wykonany z siatki jak na rysunku, jeśli bok kwadratu ma długość 1 a kąty między ramionami trójkątów równoramiennych mają miarę 1° . Odpowiedź podaj w zaokrągleniu do najbliższej liczby całkowitej. Możesz przyjąć, że dla $x \leq 1$ zachodzi $\sin(x^\circ) = \frac{\pi \cdot x}{180}$.

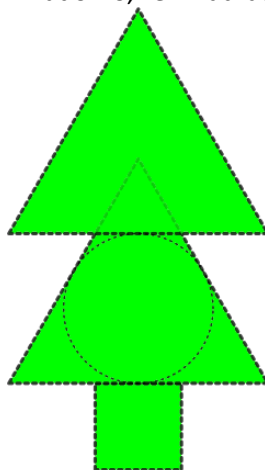


Odp.

ROZW. 32. 57

Trójkąt jaki powstanie między środkiem kwadratu, dowolnym wierzchołkiem kwadratu i wierzchołkiem ostrosłupa po złożeniu modelu jest prostokątny, a jedna z przyprostokątnych ma długość $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Druga przyprostokątna to szukana wysokość, a przeciwprostokątna to długość boku trójkąta równoramiennego o kącie o mierze 1° i podstawie długości 1. Z definicji funkcji sinus ta przeciwprostokątna to $\frac{1}{2\sin(0.5^\circ)}$. Z twierdzenia Pitagorasa szukana wysokość to $\sqrt{\frac{1}{4\sin^2(0.5^\circ)} - \frac{1}{2}} \approx 57.29$.

ZAD. 33. Jacek kupił tacie na dzień Ojca odświeżacz powietrza do samochodu w kształcie choinki jak na rysunku. Rysunek składa się z dwóch identycznych trójkątów równobocznych, okręgu wpisanego w jeden z nich i stycznego do drugiego trójkąta oraz z kwadratu, który można wpisać w okrąg powyżej. Oblicz powierzchnię odświeżacza (złożonego z kwadratu, trapezu i trójkąta), jeśli wiadomo, że kwadrat ma pole 1.



Odp.

ROZW. 33. $1 + 3\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

Pole kwadratu wynosi 1. Średnica koła to $\sqrt{2}$. Pola trójkątów to $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, wysokość małego trójkąta w części wspólnej to $\sqrt{2}/2$, więc jego pole to $\sqrt{3}/6$. Pole całej figury to $1 + 3\sqrt{3} - \sqrt{3}/6$.

ZAD. 34. Dziesięciu maturzystów przygotowuje się do pamiątkowego zdjęcia. Każdy z nich ma inny wzrost. Aby zdjęcie wyglądało naturalnie, fotograf poprosił, by ustawili się tak, aby biorąc pod uwagę kolejne wzrosty, najdłuższy podciąg rosnący lub malejący był jak najkrótszy. Znajdź najmniejszą taką liczbę x , że istnieje ustawienie maturzystów o tej własności, że najdłuższy podciąg rosnący i najdłuższy podciąg malejący są nie dłuższe niż x .

Odp.

ROZW. 34. 4

Długość najdłuższego podciągu rosnącego i malejącego dla ustawienia 7 8 9 10 3 4 5 6 2 1 wynosi 4. Pokażemy nie wprost, że ustawienie z podciągami długości co najwyżej 3 nie jest możliwe. Dla danego ustawienia zdefiniujmy liczby $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_{10}, b_{10})$, gdzie a_i to długość najdłuższego podciągu rosnącego kończącego się na pozycji i , natomiast b_i to długość najdłuższego podciągu malejącego. Ponieważ dla każdego i mamy $1 \leq a_i, b_i \leq 3$, jest 9 możliwych par, więc któraś powtarza się, powiedzmy $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$. Jednak jest to sprzeczność, gdyż dodając j -tą liczbę możemy wydłużyć któryś z ciągów kończących się na pozycji i .

ZAD. 35. Tomek bawi się klockami, które dostał na imieniny. Na każdym z klocków jest liczba naturalna. Tomek chciałby ułożyć z nich wieżę taką, że suma liczb na klockach będzie równa 10 a wartość wieży potęg otrzymanych z tych klocków będzie jak największa. Np. jeśli wybierze klocki z numerami 4, 4, 2, to otrzyma wartość wieży potęg $4^{4^2} = 4^{16} \approx 4,29 \cdot 10^9$ (bo potęgowanie wykonujemy od góry). Jaką największą liczbę może otrzymać Tomek? Pamiętaj, że może zbudować wieżę z więcej niż trzech klocków. W odpowiedzi podaj liczby na kolejnych klockach, zaczynając od najniższego.

Odp.

ROZW. 35. 2, 2, 3, 3

Największa kombinacja to $2^{2^{3^3}} \approx 1,2 \cdot 10^{40403562}$.
