

FINAŁ IV MISTRZOSTW XIV LO W ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ Z GEOMETRII ELEMENTARNEJ

1. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w $\triangle ABC$. $D, E \in AB$. $DS \parallel AC$ oraz $ES \parallel BC$. Wykaż, że obwód $\triangle DES$ równy jest $|AB|$.
2. W $\triangle ABC$, w którym $\angle B = 60^\circ$, dwusieczna $\angle A$ przecina bok BC w punkcie M . Na boku AC wzięto punkt K taki, że $\angle AMK = 30^\circ$. Znajdź $\angle OKC$, gdzie O jest środkiem okręgu opisanego na $\triangle AMC$.
3. W $\triangle ABC$ D - środek boku BC . $\angle DAC + \angle ABC = 90^\circ$. Znajdź $\angle BAC$ wiedząc, że $|AB| \neq |AC|$.
4. W trójkącie dane są wysokości h_1, h_2, h_3 . Oblicz pole trójkąta.
5. W trójkącie równoramionym dana jest wysokość h i promień okręgu wpisanego r . Oblicz boki trójkąta.
6. Dane są dwa okręgi zewnętrznie styczne. Prowadzimy w obu okręgach równoległe średnice. Wykaż, że prosta przechodząca przez przeciwległe końce średnic przechodzi przed punkt styczności.
7. W trójkącie prostokątnym z wierzchołka kąta prostego opuszczono wysokość. Powstały dwa trójkąty. Wykaż, że $r_1^2 + r_2^2 = r^2$, gdzie r_1, r_2, r promienie kół wpisanych w te trójkąty.
8. Na bokach AC i BC $\triangle ABC$ obrano punkty K i L tak, że $\frac{CK}{KA} = \frac{a}{b}$ oraz $\frac{CL}{LB} = \frac{c}{d}$. W jakim stosunku dzielą się odcinki AL i KB .
9. Boki kwadratu K_1 dzielą boki kwadratu K_2 na trzy równe części. Oblicz stosunek pól tych kwadratów.
10. Punkty S i T dzielą średnicę okręgu na trzy równe części. Punkt P należy do okręgu. $|PS| = 7, |PT| = 9$. Oblicz $|ST|$.
11. Wykaż, że trójkąty odcięte od danego przez odcinki łączące spodki jego wysokości są do siebie podobne.
12. Rozważmy trójkąt, którego wierzchołkami są spodki wysokości pewnego trójkąta. Wykazać, że ortocentrum (punkt przecięcia wszystkich wysokości) rozważanego trójkąta jest jednocześnie środkiem okręgu w niego wpisanego.
13. Pola trójkątów, których podstawami są podstawy trapezu, a wspólnym wierzchołkiem punkt przecięcia przekątnych trapezu wynoszą P_1 i P_2 . Oblicz pole trapezu.
14. W trójkącie prostokątnym ABC , o kącie prostym w C obrano punkt P taki, że $\triangle PAB$, $\triangle PAC$ i $\triangle PBC$ mają równe pola, ponadto $|PA|^2 + |PB|^2 = m$. Oblicz $|PC|$.